

MÓDULO IV

FORMAS INDETERMINADAS E INTEGRALES IMPROPIAS

Teoría, formulario y ejercicios resueltos paso a paso

Cómo usar este material. Cada tema presenta la teoría con su explicación, problemas ejemplo resueltos y una tarea con solo los enunciados. Las soluciones detalladas están en el **Solucionario** al final; el **Formulario** resume en una hoja todo el módulo.

Panorama. El módulo tiene dos mitades que comparten una misma herramienta: el **límite**. En la primera se calculan límites que la sustitución directa no resuelve porque producen expresiones sin significado ($0/0$, $\infty-\infty$, $1^\infty \dots$); la regla de L'Hôpital los desbloquea. En la segunda se extiende la integral definida a intervalos infinitos o a integrandos que se disparan, y ahí el límite es lo que da sentido a la integral.

Unidad I — Formas indeterminadas

4.1 Regla de L'Hôpital

Al calcular un límite de un cociente, lo natural es sustituir. Pero a veces el resultado es una expresión sin valor definido, como $0/0$: no se puede concluir nada, porque según las funciones el límite puede ser cualquier número, $+\infty$ o no existir. La regla de L'Hôpital resuelve esos casos comparando las **velocidades de cambio** en vez de los valores.

Teorema (regla de L'Hôpital). Sean f y g diferenciables en un intervalo abierto I , excepto posiblemente en a , con $g'(x) \neq 0$ para $x \neq a$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

entonces:

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

El teorema sigue siendo válido si los límites son laterales, si $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$, y también cuando ambas funciones tienden a $\pm\infty$ (forma ∞/∞).

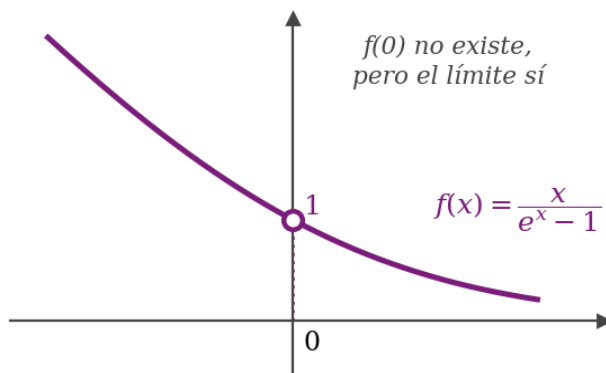


Figura 1. La función $x/(e^x-1)$ no está definida en 0, pero sus valores se acercan a 1: ese es el límite que L'Hôpital calcula.

No es la regla del cociente: se derivan el numerador y el denominador por separado, NO se aplica la fórmula de la derivada de un cociente. Es un error muy frecuente.

Verificar primero: antes de derivar hay que comprobar que realmente se tiene una forma indeterminada. Si al sustituir sale, por ejemplo, $2/1$, la regla no aplica y usarla da un resultado equivocado.

Se puede repetir: si tras derivar vuelve a aparecer $0/0$ o ∞/∞ , se aplica otra vez, tantas veces como haga falta, mientras la forma siga siendo indeterminada.

4.2 Formas indeterminadas $0/0$ e ∞/∞

Definición. Si f y g son tales que ambas tienden a 0 cuando $x \rightarrow a$, se dice que el cociente $f(x)/g(x)$ tiene la **forma indeterminada $0/0$** en a . Análogamente, si ambas tienden a $\pm\infty$, el cociente tiene la forma ∞/∞ .

El nombre es literal: la forma *no determina* el resultado. Los tres límites siguientes son todos $0/0$ y dan respuestas distintas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \infty$$

Procedimiento. (1) Sustituir para identificar la forma; (2) si es $0/0$ o ∞/∞ , derivar numerador y denominador por separado; (3) evaluar el nuevo límite; (4) repetir si vuelve a salir indeterminado.

Problemas ejemplo

► $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$

Paso 1. Se sustituye para verificar la forma: el numerador da 0 y el denominador $e^0 - 1 = 0$.

Forma $\frac{0}{0} \rightarrow$ la regla aplica.

Paso 2. Se derivan numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x}$$

Paso 3. Ahora la sustitución directa ya funciona.

$$= 1$$

► $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{1 - x + \ln x}$

Paso 1. Se verifica: $1 - 3 + 2 = 0$ arriba, y $1 - 1 + \ln 1 = 0$ abajo.

$$\text{Forma } \frac{0}{0}.$$

Paso 2. Se deriva arriba y abajo.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{-1 + \frac{1}{x}}$$

Paso 3. Al sustituir vuelve a salir $0/0$ ($3 - 3 = 0$ y $-1 + 1 = 0$): se aplica otra vez.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{-\frac{1}{x^2}}$$

Paso 4. Ahora sí se evalúa.

$$= \frac{6}{-1} = -6$$

Tarea 4.2

Antes de derivar, verifica siempre la forma sustituyendo. Uno de los ejercicios NO es indeterminado: identifícalo. Varios requieren aplicar la regla dos o tres veces.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{2 - x}$

- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh 2x}{\tanh x}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x - 4}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2/x)}{1/x}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cosh x}{x^2}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{\sin^3 x}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 10^x}{x}$

4.3 Otras formas indeterminadas

La regla de L'Hôpital solo se aplica a **cocientes**. Las demás formas indeterminadas se resuelven transformándolas primero en un cociente $0/0$ o ∞/∞ .

Cocientes	
$\frac{0}{0}$	aplicar L'Hôpital directamente
$\frac{\infty}{\infty}$	aplicar L'Hôpital directamente
Producto y diferencia	
$0 \cdot \infty$	escribir como cociente: $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$
$\infty - \infty$	combinar en una sola fracción
Exponenciales	
1^∞	tomar $\ln$, aplicar L'Hôpital
∞^0	y exponenciar al final:
0^0	$L = e^{\lim \ln y}$

Figura 2. Las siete formas indeterminadas y la estrategia para cada grupo.

Forma $0 \cdot \infty$. Se convierte el producto en cociente pasando uno de los factores al denominador como recíproco:

$$f \cdot g = \frac{f}{1/g} \quad \text{o bien} \quad \frac{g}{1/f}$$

Conviene elegir la versión que produzca derivadas manejables; a veces una opción lleva a un callejón sin salida y la otra se resuelve en un paso.

Forma $\infty - \infty$. Se combinan los dos términos en una sola fracción (común denominador, factorización o multiplicación por el conjugado). El resultado suele ser $0/0$.

Formas exponenciales 1^∞ , ∞^0 y 0^0 . El exponente impide aplicar la regla directamente. La salida es tomar logaritmo, que baja el exponente y convierte la potencia en un producto:

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$

Ese producto es de la forma $0 \cdot \infty$, que ya se sabe tratar. Una vez hallado el límite de $\ln y$, se **exponencia** para recuperar el límite buscado:

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} \ln y = L \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} y = e^L$$

No olvidar el último paso: el error más común en estas formas es dar como respuesta el límite de $\ln y$. Hay que exponenciar: si $\ln y \rightarrow l$, el límite es e , no l .

Problemas ejemplo

► $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x \cdot \csc x$

Paso 1. Se identifica la forma: $\arcsen x \rightarrow 0$ y $\csc x \rightarrow +\infty$, así que es $0 \cdot \infty$.

Paso 2. Se pasa la cosecante al denominador como seno para formar un cociente.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\operatorname{sen} x}$$

Paso 3. Ahora la forma es $0/0$ y se aplica la regla.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x}$$

Paso 4. Se evalúa en 0.

$$= \frac{1}{1} = 1$$

► $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1)^{\cot x}$

Paso 1. La base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$: es la forma 1^∞ .

Paso 2. Se nombra la expresión y se toma logaritmo para bajar el exponente.

$$y = (x + 1)^{\cot x} \Rightarrow \ln y = \cot x \cdot \ln(x + 1) = \frac{\ln(x + 1)}{\tan x}$$

Paso 3. El cociente es $0/0$: se aplica L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \frac{\frac{1}{x+1}}{\sec^2 x} = 1$$

Paso 4. Se exponencia para recuperar y .

$$= e^1 = e$$

Tarea 4.3

Clasifica primero la forma. En las de tipo $0 \cdot \infty$ decide cuál factor conviene invertir; en las exponenciales no olvides exponenciar al final.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

Unidad II — Integrales impropias

La integral definida $\int$ de “a” a “b” se definió para un intervalo **cerrado y acotado** y una función **continua** en él. Si se rompe alguna de esas dos condiciones —el intervalo es infinito, o el integrando se dispara— la definición no aplica y se habla de una **integral impropia**. La salida es la misma en ambos casos: integrar hasta un valor variable y después tomar el límite.

Si el límite existe y es finito, la integral **converge** y ese valor es su resultado; si no existe o es infinito, **diverge**.

4.4 Integrales impropias con límites de integración infinitos

Definición (límite superior infinito). Si f es continua para toda $x \geq a$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Definición (límite inferior infinito). Si f es continua para toda $x \leq b$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Definición (ambos límites infinitos). Si f es continua en todos los reales y c es cualquier número real:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

siempre que **los dos límites existan por separado**. Este detalle es esencial: no basta con que la suma parezca cancelarse.

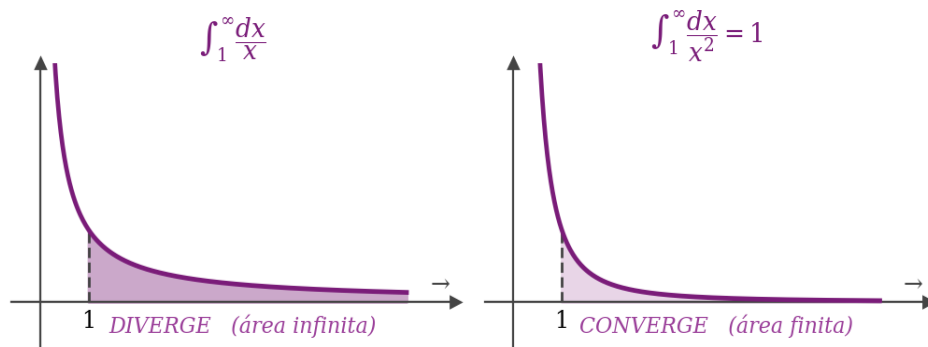


Figura 3. Misma frontera, distinto destino: $1/x$ encierra área infinita, mientras que $1/x^2$ encierra área 1.

Las dos regiones de la figura son ilimitadas hacia la derecha, pero solo una tiene área finita. Lo que decide es la **rapidez con que el integrando se aproxima a cero**: $1/x^2$ decrece lo bastante rápido, $1/x$ no.

Criterio de la p-integral. Este comportamiento se resume en un criterio muy útil:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \text{converge si } p > 1, \quad \text{diverge si } p \leq 1$$

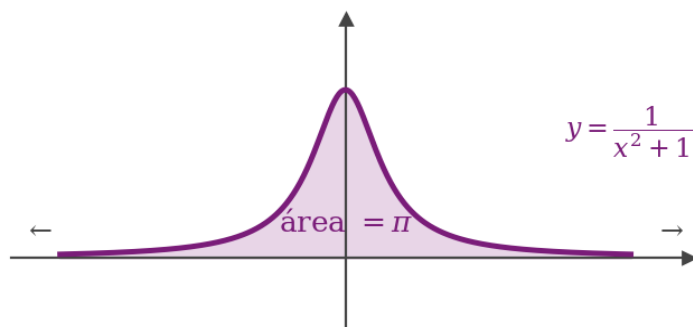


Figura 4. Región ilimitada en ambas direcciones con área finita: $\int dx/(x^2+1)$ sobre todos los reales vale π .

Cuidado con la simetría: para $\int$ de $-\infty$ a $+\infty$ de $x \, dx$, el límite simétrico de $-r$ a r da 0 para toda r , pero la integral impropia DIVERGE: cada mitad por separado es infinita. Hay que evaluar los dos límites de forma independiente.

Problema ejemplo

► $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

Paso 1. El intervalo es infinito: se reemplaza el extremo por una variable y se toma el límite.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-2} \, dx$$

Paso 2. Se antideriva y se evalúa entre 1 y b .

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

Paso 3. Cuando $b \rightarrow +\infty$ el término $1/b$ se anula.

$$= 1 \quad (\text{converge})$$

Tarea 4.4

En cada una: reemplaza el extremo infinito por una variable, antideriva, evalúa y toma el límite. Indica siempre si converge (con su valor) o diverge.

- 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$
- 2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$
- 3) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$
- 4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$
- 5) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 4}}$
- 6) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
- 7) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \, dx$
- 8) $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$

4.5 Integrales impropias con discontinuidades infinitas

El segundo tipo de integral impropia aparece cuando el intervalo es finito pero el **integrando no está acotado**: tiene una asíntota vertical en algún punto. El tratamiento es el mismo —acercarse con un límite— pero hay que distinguir **dónde** está la discontinuidad.

Discontinuidad en el límite inferior. Si f es continua en $(a, b]$ y no está acotada cerca de a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Discontinuidad en el límite superior. Si f es continua en $[a, b)$ y no está acotada cerca de b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Discontinuidad en un punto interior. Si la asíntota está en un c con $a < c < b$, hay que **partir la integral** en ese punto:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f(x) dx$$

y la integral converge **solo si los dos límites existen**. Si uno diverge, toda la integral diverge.

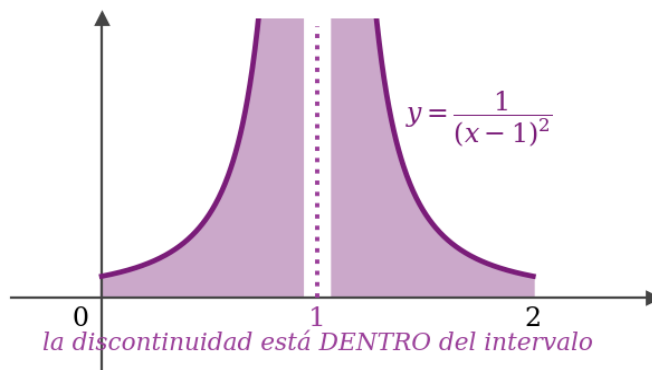


Figura 5. Discontinuidad interior: si no se detecta, se aplica el teorema fundamental sin derecho y se obtiene un resultado falso (incluso negativo).

El error clásico: aplicar directamente $g(b) - g(a)$ sin notar la asíntota interior. Para $\int$ de 0 a 2 de $dx/(x-1)^2$ ese descuido da -2 , un número negativo para el área de una región que está por encima del eje: señal inequívoca de que algo se hizo mal. La integral en realidad diverge.

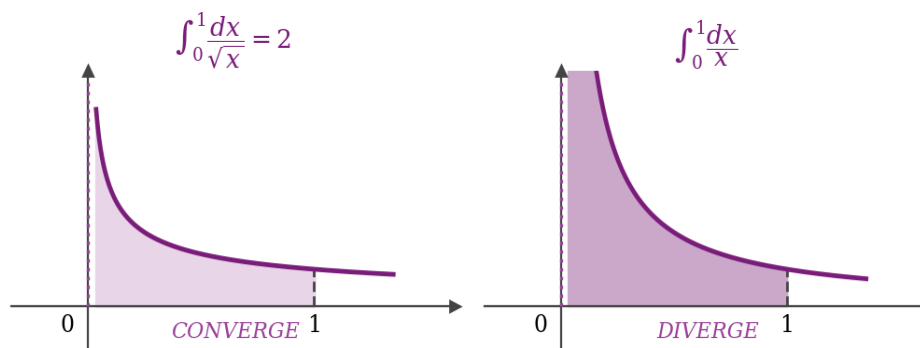


Figura 6. Con la asíntota en un extremo también puede haber área finita: $1/\sqrt{x}$ converge, $1/x$ no.

Criterio de la p-integral (en el origen). El comportamiento se resume así, y conviene notar que la condición es la **opuesta** a la del caso infinito:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ converge si } p < 1, \text{ diverge si } p \geq 1$$

Problema ejemplo

► $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$



Paso 1. Se localiza la discontinuidad: el radicando se anula en $x = 2$, que es el límite superior.

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Paso 2. Es la forma del arcoseno con $a = 2$.

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_1^t$$

Paso 3. Se evalúa y se toma el límite: $\arcsen(1) = \pi/2$ y $\arcsen(1/2) = \pi/6$.

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad (\text{converge})$$

Tarea 4.5

Localiza primero la discontinuidad y fíjate si está en un extremo o DENTRO del intervalo; en ese segundo caso hay que partir la integral. Indica si converge (con su valor) o diverge.

- 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
- 2) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$
- 3) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$
- 4) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$
- 5) $\int_0^1 x \ln x \, dx$
- 6) $\int_0^{\pi/2} \tan \theta \, d\theta$
- 7) $\int_{-2}^0 \frac{dw}{(w+1)^{1/3}}$
- 8) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$



FORMULARIO — Módulo IV

Regla de L'Hôpital

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{g'} = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = L$$

válida para $0/0$ y ∞/∞ , límites laterales y $x \rightarrow \pm\infty$

se deriva arriba y abajo por separado (no es la regla del cociente)

verificar la forma antes de aplicar; puede repetirse

Las siete formas

$$\frac{0}{0} \text{ y } \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{L'Hôpital directo}$$

$$0 \cdot \infty \rightarrow \text{escribir } \frac{f}{1/g}$$

$$\infty - \infty \rightarrow \text{una sola fracción}$$

$$1^\infty, \infty^0, 0^0 \rightarrow \text{tomar } \ln$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} \ln y = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = e^L$$

Derivadas que se repiten

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad (\tanh x)' = \text{sech}^2 x$$

Integrales impropias — límites infinitos

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f$$

los DOS límites deben existir por separado

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ converge si } p > 1$$

Discontinuidades infinitas

$$\text{en } a: \int_a^b f = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f$$

$$\text{en } b: \int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f$$

en c interior: partir la integral

$$\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ converge si } p < 1$$

(condición opuesta a la del caso infinito)

Antiderivadas útiles

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} |x/a|$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

el resultado debe ser un número; si sale $\pm\infty$ o no existe, diverge



Solucionario paso a paso

Solucionario — Tarea 4.2 (formas 0/0 e ∞/∞)

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$

Paso 1. Se sustituye para identificar la forma.

Forma $\frac{0}{0} \rightarrow$ la regla aplica.

Paso 2. Se derivan numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 x}$$

Paso 3. Se evalúa.

$$= 1$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

Paso 1. Ambos tienden a 0: forma 0/0.

Paso 2. Se deriva: $(\tan x - x)' = \sec^2 x - 1$ y $(x - \sin x)' = 1 - \cos x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}$$

Paso 3. Vuelve a ser 0/0. Conviene notar que $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$ y comparar órdenes: $\tan^2 x$ se comporta como x^2 y $1 - \cos x$ como $x^2/2$.

$$= 2$$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{2 - x}$

Paso 1. En $x = 2$: $\sin 2\pi = 0$ y $2 - 2 = 0$. Forma 0/0.

Paso 2. Se deriva: $(\sin \pi x)' = \pi \cos \pi x$ y $(2 - x)' = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi \cos \pi x}{-1}$$

Paso 3. $\cos 2\pi = 1$.

$$= -\pi \approx -3.142$$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$

Paso 1. Ambos tienden a 0 ($2^0 - 3^0 = 0$). Forma 0/0.

Paso 2. Se usa $(a^x)' = a^x \ln a$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 - 3^x \ln 3}{1}$$

Paso 3. Se evalúa en 0 y se junta el logaritmo.

$$= \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3} \approx -0.405$$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh 2x}{\tanh x}$

Paso 1. Se sustituye para identificar la forma.

Forma $\frac{0}{0} \rightarrow$ la regla aplica.

Paso 2. Se derivan numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sech}^2 2x}{\operatorname{sech}^2 x}$$

Paso 3. Se evalúa.

$$= 2$$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 3x - 4}$

Paso 1. Se sustituye para identificar la forma.



Forma $\frac{0}{0} \rightarrow$ la regla aplica.

Paso 2. Se derivan numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{3x^2 + 3}$$

Paso 3. Se evalúa.

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2/x)}{1/x}$

Paso 1. Cuando $x \rightarrow +\infty$ tanto $\sin(2/x)$ como $1/x$ tienden a 0. Forma 0/0.

Paso 2. Se deriva con la regla de la cadena.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2/x) \cdot (-2/x^2)}{-1/x^2}$$

Paso 3. Los factores $-1/x^2$ se cancelan y $\cos(2/x) \rightarrow \cos 0 = 1$.

$$= 2$$

8) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

Paso 1. $\ln(\sin x) \rightarrow \ln 1 = 0$ y $(\pi - 2x)^2 \rightarrow 0$. Forma 0/0.

Paso 2. Se deriva.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi - 2x)}$$

Paso 3. Sigue siendo 0/0; se aplica otra vez y se simplifica.

$$= -\frac{1}{8}$$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cosh x}{x^2}$

Paso 1. $\cos 0 - \cosh 0 = 1 - 1 = 0$ y $x^2 \rightarrow 0$. Forma 0/0.

Paso 2. Primera aplicación.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \sinh x}{2x}$$

Paso 3. Otra vez 0/0; se aplica de nuevo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - \cosh x}{2}$$

Paso 4. Se evalúa: $(-1 - 1)/2$.

$$= -1$$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{\sin^3 x}$

Paso 1. $\sinh 0 - \sin 0 = 0$ y $\sin^3 0 = 0$. Forma 0/0.

Paso 2. Se aplica la regla tres veces; conviene ir simplificando los factores no nulos en cada paso.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x}$$

Paso 3. Tras las aplicaciones restantes se llega a:

$$= \frac{1}{3}$$

11) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x}$

Paso 1. ATENCIÓN: se sustituye antes de derivar. En $x = \pi$: $1 + \cos 2\pi = 2$ y $1 - \sin \pi = 1$.

Forma $\frac{2}{1} \rightarrow$ NO es indeterminada.

Paso 2. La regla de L'Hôpital no aplica: basta la sustitución directa. (Aplicarla aquí daría un resultado falso.)

$$= 2$$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 10^x}{x}$



Paso 1. $e^0 - 10^0 = 0$ y $x \rightarrow 0$. Forma $0/0$.

Paso 2. Se deriva usando $(a^x)' = a^x \ln a$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 10^x \ln 10}{1}$$

Paso 3. Se evalúa en 0.

$$= 1 - \ln 10$$

Solucionario — Tarea 4.3 (otras formas indeterminadas)

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

Paso 1. $x \rightarrow 0$ y $\ln x \rightarrow -\infty$: forma $0 \cdot \infty$.

Paso 2. Se pasa x al denominador como $1/x$ para formar ∞/∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

Paso 3. Se aplica la regla.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -x$$

Paso 4. El límite de $-x$ es 0.

$$= 0$$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$

Paso 1. $x \rightarrow +\infty$ y $(e^{1/x} - 1) \rightarrow 0$: forma $\infty \cdot 0$.

Paso 2. Se sustituye $u = 1/x$, de modo que $u \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{u}$$

Paso 3. Forma $0/0$: se aplica la regla.

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u}{1}$$

$$= 1$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right)$

Paso 1. Ambos términos tienden a $+\infty$: forma $\infty - \infty$.

Paso 2. Se combina en una sola fracción usando $1/\sec x = \cos x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} \right) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Paso 3. Ahora es $0/0$: se aplica la regla.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$$

Paso 4. Vuelve a ser $0/0$; una aplicación más da $\cos x / 2$.

$$= \frac{1}{2}$$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Paso 1. Ambos términos tienden a $+\infty$: forma $\infty - \infty$.

Paso 2. Se combina con común denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

Paso 3. Es $0/0$. Se aplica la regla dos veces.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x}$$

Paso 4. Se evalúa: $0/2$.

$$= 0$$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$



Paso 1. Base y exponente tienden a 0: forma 0^0 .

Paso 2. Se toma logaritmo.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

Paso 3. Ese límite ya se calculó en el ejercicio 1: vale 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0$$

Paso 4. Se exponencia.

$$= e^0 = 1$$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Paso 1. La base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$: forma 1^∞ .

Paso 2. Se toma logaritmo y se escribe como cociente.

$$\ln y = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x}$$

Paso 3. Forma $0/0$; con $u = 1/x$ se aplica la regla.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+u}}{1} = 1$$

Paso 4. Se exponencia.

$$= e^1 = e$$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$

Paso 1. Base $\rightarrow +\infty$ y exponente $\rightarrow 0$: forma ∞^0 .

Paso 2. Se toma logaritmo.

$$\ln y = \frac{\ln x}{x}$$

Paso 3. Forma ∞/∞ : se aplica la regla.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Paso 4. Se exponencia.

$$= e^0 = 1$$

8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

Paso 1. $\sin x \rightarrow 0$ y el exponente $\rightarrow 0$: forma 0^0 .

Paso 2. Se toma logaritmo y se arma el cociente.

$$\ln y = x \ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{1/x}$$

Paso 3. Forma ∞/∞ . Al aplicar la regla y simplificar se obtiene un límite que tiende a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0$$

Paso 4. Se exponencia.

$$= e^0 = 1$$

Solucionario — Tarea 4.4 (límites de integración infinitos)

1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$

Paso 1. Se reemplaza el extremo infinito por b .

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-3} dx$$

Paso 2. Se antideriva y se evalúa.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^b = -\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2}$$

Paso 3. El término con b se anula. (Coincide con el criterio: $p = 3 > 1$.)

$$= \frac{1}{2} \quad \text{converge}$$



2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

Paso 1. Se reemplaza el extremo por b .

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$

Paso 2. La antiderivada es $\ln x$.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \ln b$$

Paso 3. $\ln b$ crece sin cota. (Criterio: $p = 1$, no converge.)

= DIVERGE

3) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

Paso 1. Se reemplaza el extremo por b .

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

Paso 2. Se antideriva.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + 1)$$

Paso 3. $e^{-b} \rightarrow 0$.

= 1 converge

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$

Paso 1. Ambos extremos son infinitos: se parte en $c = 0$ y se evalúan los dos límites por separado.

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2 + 1} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Paso 2. La antiderivada es $\arctan x$.

$$(0 - \tan^{-1} a) + (\tan^{-1} b - 0)$$

Paso 3. $\arctan a \rightarrow -\pi/2$ y $\arctan b \rightarrow \pi/2$.

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

= π converge

5) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$

Paso 1. Es la forma que conduce a la arcosecante, con $a = 2$.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \sec^{-1} \frac{x}{2} \right]_2^b$$

Paso 2. Se evalúa: $\text{arcsec}(1) = 0$ y $\text{arcsec}(b/2) \rightarrow \pi/2$.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

= $\frac{\pi}{4}$ converge

6) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

Paso 1. Se integra por partes con $u = \ln x$ y $dv = x^{-2} dx$.

$$u = \ln x, \quad dv = x^{-2} dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = -\frac{1}{x}$$

Paso 2. Se aplica la fórmula entre 1 y b .

$$-\frac{\ln b}{b} + \int_1^b \frac{dx}{x^2}$$

Paso 3. El primer término tiende a 0 (por L'Hôpital: $\infty/\infty \rightarrow 1/b \rightarrow 0$) y la integral vale $1 - 1/b \rightarrow 1$.

= 1 converge

7) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

Paso 1. Se sustituye $u = x^2$, $du = 2x dx$.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{b^2} e^{-u} du$$

Paso 2. Se antideriva.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-b^2})$$

Paso 3. La exponencial se anula.

$$= \frac{1}{2} \text{ converge}$$

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$

Paso 1. Se parte en $c = 0$ y se evalúan los dos límites por separado (NO se puede usar simetría).

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x dx$$

Paso 2. Se antideriva cada parte.

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}a^2\right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}b^2$$

Paso 3. Ninguno de los dos límites existe: el primero $\rightarrow -\infty$ y el segundo $\rightarrow +\infty$.

= DIVERGE

Nota: el límite simétrico de $-r$ a r vale 0 para toda r , pero eso NO es la integral impropia.

Solucionario — Tarea 4.5 (discontinuidades infinitas)

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Paso 1. El integrando se dispara en $x = 0$, que es el límite inferior.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x^{-1/2} dx$$

Paso 2. Se antideriva y se evalúa.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{t})$$

Paso 3. $\sqrt{t} \rightarrow 0$. (Criterio: $p = 1/2 < 1$.)

$$= 2 \text{ converge}$$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

Paso 1. La asíntota está en $x = 0$, el límite inferior.

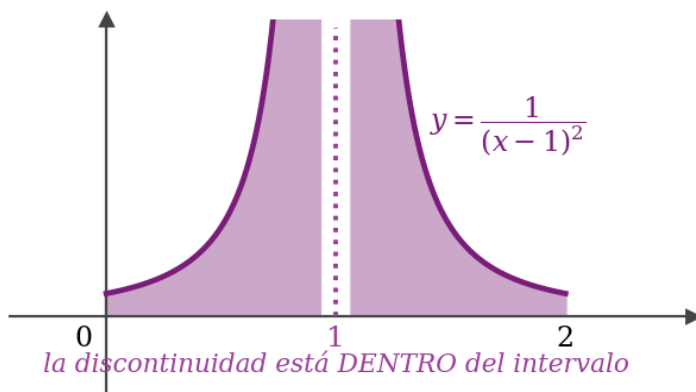
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln t) = -\ln t$$

Paso 2. Cuando $t \rightarrow 0^+$, $\ln t \rightarrow -\infty$, así que $-\ln t \rightarrow +\infty$. (Criterio: $p = 1$.)

= DIVERGE

3) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Paso 1. ATENCIÓN: la discontinuidad está en $x = 1$, DENTRO del intervalo. Hay que partir.





$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Paso 2. La antiderivada es $-1/(x-1)$. En la primera parte:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{t-1} - 1 \right) \rightarrow +\infty$$

Paso 3. Ese límite ya no existe, así que no hace falta evaluar el segundo.

= DIVERGE

Nota: aplicar el teorema fundamental sin partir daría -2 , un valor negativo imposible para esta región.

4) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

Paso 1. La discontinuidad vuelve a estar en $x = 1$, interior. Se parte la integral.

Paso 2. La antiderivada es $3(x-1)^{1/3}$.

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} [3(t-1)^{1/3} + 3] = 3$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} [3 - 3(s-1)^{1/3}] = 3$$

Paso 3. Los dos límites existen: se suman. (Criterio: $p = 2/3 < 1$.)

= 6 converge

5) $\int_0^1 x \ln x \, dx$

Paso 1. $\ln x \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$: la discontinuidad está en el límite inferior.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln x \, dx$$

Paso 2. Se integra por partes: $u = \ln x$, $dv = x \, dx$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_t^1$$

Paso 3. En $x = 1$ queda $-1/4$. El término $t^2 \ln t$ tiende a 0 (forma $0 \cdot \infty$ resuelta con L'Hôpital).

= $-\frac{1}{4}$ converge

6) $\int_0^{\pi/2} \tan \theta \, d\theta$

Paso 1. $\tan \theta \rightarrow +\infty$ cuando $\theta \rightarrow \pi/2^-$: discontinuidad en el límite superior.

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2^-} \int_0^t \tan \theta \, d\theta$$

Paso 2. La antiderivada es $-\ln|\cos \theta|$.

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2^-} (-\ln|\cos t| + \ln 1)$$

Paso 3. $\cos t \rightarrow 0^+$, así que $\ln|\cos t| \rightarrow -\infty$ y el resultado $\rightarrow +\infty$.

= DIVERGE

7) $\int_{-2}^0 \frac{dw}{(w+1)^{1/3}}$

Paso 1. El denominador se anula en $w = -1$, que está DENTRO de $[-2, 0]$. Se parte.

Paso 2. La antiderivada es $(3/2)(w+1)^{2/3}$.

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} \left[\frac{3}{2} (t+1)^{2/3} - \frac{3}{2} \right] = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{s \rightarrow -1^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} (s+1)^{2/3} \right] = \frac{3}{2}$$

Paso 3. Los dos límites existen: se suman y se cancelan.

= 0 converge

8) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$

Paso 1. Se factoriza el denominador para localizar las asíntotas.

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

Paso 2. La raíz $x = 3$ está DENTRO de $[0, 4]$ ($x = -1$ queda fuera). Se parte en 3.

Paso 3. Cerca de $x = 3$ el integrando se comporta como $1/[4(x-3)]$, cuya integral es logarítmica y diverge.



UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
DE PANAMÁ

$$\lim_{t \rightarrow 3^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-3)(x+1)} \rightarrow -\infty$$

= DIVERGE
