



MÓDULO I

ANTIDERIVADA E INTEGRACIÓN INDEFINIDA

Unidad I — Teoría ampliada, ejercicios y solucionario paso a paso

Cómo usar este material. Cada tema presenta primero la teoría con su explicación, después problemas ejemplo resueltos y práctica en clase (con la solución a la vista) y, por último, una tarea con solo los enunciados. Las soluciones detalladas, paso a paso, de todas las tareas están reunidas en el **Solucionario** al final del documento.

1.1 Definición de antiderivada o primitiva

Una función F es una **antiderivada** (o primitiva) de f en un intervalo I si su derivada devuelve a f :

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \text{ en } I$$

Integrar es, por tanto, la operación inversa de derivar. Como la derivada de una constante es cero, si a una primitiva le sumamos cualquier constante obtenemos otra primitiva; de ahí que una función posea **infinitas** antiderivadas. Todas se reúnen en la **integral indefinida**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

El símbolo $\int$ (una "S" alargada de "suma") indica integración, $f(x)$ es el integrando, dx señala la variable de integración y C es la constante de integración.

Geométricamente, C representa una familia de curvas paralelas: todas las primitivas de f tienen la misma pendiente en cada valor de x , por lo que unas se obtienen de otras mediante un desplazamiento vertical.

Comprobación: para verificar cualquier integral, deriva el resultado; si es correcto, debes recuperar exactamente el integrando.

1.2 Reglas básicas de integración

Se deducen leyendo "al revés" las derivadas conocidas y constituyen la base de todo el cálculo integral:

$$\int dx = x + C$$

$$\int k dx = kx + C \quad (k \text{ constante})$$

Homogeneidad y linealidad. Una constante multiplicativa sale de la integral, y la integral de una suma es la suma de las integrales:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Regla de la potencia. La fórmula más usada; válida para cualquier exponente racional salvo -1 :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

Es la regla de la potencia de la derivada invertida: al derivar bajamos el exponente y restamos 1; al integrar *sumamos* 1 al exponente y dividimos entre ese nuevo exponente. El caso $n = -1$ se resuelve con el logaritmo natural (tema 1.5).



Antes de integrar, reescribe: convierte raíces y cocientes en potencias ($\sqrt{x} = x^{(1/2)}$, $1/x^n = x^{(-n)}$) y distribuye los productos. Solo cuando el integrando es una suma de potencias puede aplicarse la regla de la potencia.

Error común: no existe una "regla del producto" ni una "regla del cociente" para integrar. Un producto o cociente debe reescribirse antes como suma de términos.

Problemas ejemplo

Aplicación directa de la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}\int x^2 dx &= \frac{x^3}{3} + C \\ \int \frac{1}{x^2} dx &= \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C \\ \int \sqrt[3]{x} dx &= \int x^{1/3} dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + C\end{aligned}$$

Con linealidad:

$$\begin{aligned}\int (3x + 5) dx &= \frac{3}{2}x^2 + 5x + C \\ \int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}} dt &= 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C\end{aligned}$$

Tarea 1.2

Resuelve (solucionario paso a paso al final):

- 1) $\int (4x^3 - 6x^2 + 2x - 5) dx$
- 2) $\int (\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}) dx$
- 3) $\int \frac{5}{x^4} dx$
- 4) $\int \frac{2x^5 - x^3 + 7}{x^2} dx$
- 5) $\int (t^2 + 1)^2 dt$
- 6) $\int 3\sqrt{x}(x - 2) dx$
- 7) $\int (2 - 3x)^2 dx$
- 8) $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx$

1.3 Integración por sustitución (cambio de variable)

Es la regla de la cadena aplicada al revés. Si en el integrando aparece una función compuesta $f(g(x))$ multiplicada por la derivada de su parte interna:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

Caso particular más frecuente (regla de la potencia generalizada):

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

Método práctico. (1) Elegir $u = g(x)$; (2) calcular $du = g'(x) dx$; (3) reescribir toda la integral en términos de u ; (4) integrar con las reglas básicas; (5) volver a la variable original.



La clave es reconocer una función interna cuya derivada aparece (salvo una constante) multiplicando al resto. Si falta una constante, se compensa multiplicando y dividiendo por ella; por ejemplo, si se necesita $6x^2 dx$ y solo se tiene $x^2 dx$, se escribe el factor $1/6$ fuera de la integral.

Consejo: *elige como u la expresión "más interna": la que está dentro de una potencia, una raíz o una función trigonométrica. Si tras sustituir todavía queda la variable original, la elección no fue la adecuada; prueba otra.*

Problema ejemplo

$$\begin{aligned} \bullet \int x^2(5 + 2x^3)^8 dx \\ u = 5 + 2x^3, \quad du = 6x^2 dx. \text{ Se introduce el factor } 1/6 \text{ para completar } du. \\ = \frac{1}{54}(5 + 2x^3)^9 + C \end{aligned}$$

Práctica en clase

$$\begin{aligned} 1) \int \sqrt{1 - 4y} dy \\ u = 1 - 4y, \quad du = -4 dy. \\ = -\frac{1}{6}(1 - 4y)^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int x \sqrt[3]{x^2 - 9} dx \\ u = x^2 - 9, \quad du = 2x dx. \\ = \frac{3}{8}(x^2 - 9)^{4/3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{y^3}{(1 - 2y^4)^5} dy \\ u = 1 - 2y^4, \quad du = -8y^3 dy. \\ = \frac{1}{32}(1 - 2y^4)^{-4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int 6x^2 \sen x^3 dx \\ u = x^3, \quad du = 3x^2 dx. \\ = -2 \cos x^3 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \int \sen^3 \theta \cos \theta d\theta \\ u = \sen \theta, \quad du = \cos \theta d\theta. \\ = \frac{1}{4}\sen^4 \theta + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \int \sec x \tan x \cos(\sec x) dx \\ u = \sec x, \quad du = \sec x \tan x dx. \\ = \sen(\sec x) + C \end{aligned}$$

Tarea 1.3

Resuelve por sustitución (solucionario paso a paso al final):

- 1) $\int \sqrt[3]{3x - 4} dx$
- 2) $\int x(2x^2 + 1)^6 dx$
- 3) $\int \frac{s}{\sqrt{3s^2 + 1}} ds$
- 4) $\int x^5(x^3 + 3)^{1/4} dx$
- 5) $\int \sen \frac{x}{3} dx$
- 6) $\int \frac{1}{2} t \cos 4t^2 dt$
- 7) $\int \csc^2 2\theta d\theta$



- 8) $\int r^2 \sec^2 r^3 dr$
9) $\int \cos x (2 + \sin x)^5 dx$
10) $\int \frac{4 \sin x}{(1 + \cos x)^2} dx$
11) $\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x} \frac{dx}{x^2}}$
12) $\int \sin 2x \sqrt{2 - \cos 2x} dx$
13) $\int \cos^2 t \sin t dt$
14) $\int (\tan 2x + \cot 2x)^2 dx$
15) $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}} dx$
16) $\int \sqrt{3 + s} (s + 1)^2 ds$
17) $\int \frac{(\sqrt[3]{r} + 2)^4}{r^{2/3}} dr$
18) $\int \frac{x^3}{(x^2 + 4)^{3/2}} dx$
19) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - 2x^2}} dx$
20) $\int \sin x \sin(\cos x) dx$

Tarea 1.3 — complementaria

- C1) $\int 3x^2(x^3 + 5)^4 dx$
C2) $\int x \sqrt{x^2 + 4} dx$
C3) $\int \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} dx$
C4) $\int \sin^5 x \cos x dx$
C5) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$
C6) $\int \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 5)^3} dx$
C7) $\int \sec^2 x \tan^3 x dx$
C8) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx$

1.4 Integrales de funciones trigonométricas

Cada fórmula es la lectura inversa de una derivada trigonométrica:

$$\begin{aligned}\int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \sec^2 x dx &= \tan x + C & \int \csc^2 x dx &= -\cot x + C \\ \int \sec x \tan x dx &= \sec x + C & \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + C\end{aligned}$$

Como $(\sin x)' = \cos x$, al invertir resulta $\int \cos x dx = \sin x$. El signo negativo de las cofunciones (coseno, cotangente, cosecante) al integrar refleja el signo negativo que aparece cuando se derivan.

Consejo: cuando el integrando no encaje directamente con una fórmula, usa identidades para reescribirlo: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \tan^2 x = \sec^2$, $1 + \cot^2 x = \csc^2$. A menudo convierten una integral aparentemente difícil en una inmediata.

Problemas ejemplo



$$\text{a) } \int (3 \sec x \tan x - 5 \csc^2 x) dx \\ = 3 \sec x + 5 \cot x + C$$

$$\text{b) } \int \frac{2 \cot x - 3 \sec^2 x}{\sec x} dx \\ = -2 \csc x + 3 \cos x + C$$

Práctica en clase

$$1) \int 6t^2 \sqrt[3]{t} dt \\ = \frac{9}{5} t^{10/3} + C$$

$$2) \int \frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}} dy \\ = \frac{2}{9} y^{9/2} + \frac{4}{5} y^{5/2} - 2y^{1/2} + C$$

$$3) \int (2 \cot^2 \theta - 3 \tan^2 \theta) d\theta \\ \text{Usa } \cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1 \text{ y } \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1. \\ = -2 \cot \theta - 3 \tan \theta + \theta + C$$

$$4) \int \frac{3 \tan \theta - 4 \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta \\ = 3 \sec \theta - 4 \sin \theta + C$$

Tarea 1.4

Resuelve (solucionario paso a paso al final):

$$1) \int 2x^7 dx$$

$$2) \int \frac{1}{x^3} dx$$

$$3) \int 10 \sqrt[3]{x^2} dx$$

$$4) \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$5) \int x^4(5 - x^2) dx$$

$$6) \int (2 + 3x^2 - 8x^3) dx$$

$$7) \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5 \right) dx$$

$$8) \int \frac{x^2 + 4x + 4}{\sqrt{x}} dx$$

$$9) \int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$$

$$10) \int (5 \cos x - 4 \sin x) dx$$

$$11) \int \frac{\sec x}{\cos^2 x} dx$$

$$12) \int (4 \csc x \cot x + 2 \sec^2 x) dx$$

$$13) \int (3 \csc^2 t - 5 \sec t \tan t) dt$$

Tarea 1.4 — complementaria

$$\text{C1) } \int (2 \sin x + 3 \cos x) dx$$

$$\text{C2) } \int (\sec^2 x - \csc^2 x) dx$$

$$\text{C3) } \int (5 \sec x \tan x + 2 \csc x \cot x) dx$$

$$\text{C4) } \int (1 + \tan^2 x) dx$$

$$\text{C5) } \int \tan^2 x dx$$



C6) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

C7) $\int (3 - 2 \cot^2 x) dx$

C8) $\int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx$

1.5 Integrales que conducen a la función logaritmo natural

Resuelven el caso $n = -1$ que la regla de la potencia dejaba fuera:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

El valor absoluto es esencial: el logaritmo solo está definido para argumentos positivos, pero $1/x$ se integra tanto para $x > 0$ como para $x < 0$; escribir $\ln|x|$ cubre ambos casos. La forma general responde al patrón u'/u : si el numerador es (un múltiplo de) la derivada del denominador, la integral es un logaritmo.

De este patrón se obtienen las cuatro integrales trigonométricas restantes:

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= -\ln|\cos x| + C & \int \cot x dx &= \ln|\sin x| + C \\ \int \sec x dx &= \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int \csc x dx &= \ln|\csc x - \cot x| + C\end{aligned}$$

Tarea 1.5

Resuelve (solucionario paso a paso al final):

- 1) $\int \frac{1}{x+3} dx$
- 2) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$
- 3) $\int \frac{1}{2x-5} dx$
- 4) $\int \frac{3x^2}{x^3+4} dx$
- 5) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+7} dx$
- 6) $\int \tan 3x dx$
- 7) $\int \frac{4}{1-x} dx$
- 8) $\int \cot \frac{x}{2} dx$

1.6 Integral de la función exponencial

$$\int e^u du = e^u + C \quad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

La constante e es única porque su tasa de crecimiento iguala a su propio valor; por eso e^x es a la vez su derivada y su integral. Para otras bases aparece el factor $1/\ln a$ que corrige esa tasa de crecimiento ($a > 0$, $a \neq 1$).

Tarea 1.6

Resuelve (solucionario paso a paso al final):

- 1) $\int e^{5x} dx$
- 2) $\int x e^{x^2} dx$



- 3) $\int 3^x dx$
- 4) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$
- 5) $\int e^{\cos x} \sin x dx$
- 6) $\int 2x \cdot 5^{x^2} dx$
- 7) $\int (e^x - e^{-x}) dx$
- 8) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

1.7 Integrales que producen funciones trigonométricas inversas

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} &= \arcsen \frac{u}{a} + C \\ \int \frac{du}{a^2 + u^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \\ \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} &= \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} |u/a| + C\end{aligned}$$

Identifica la forma del radicando o del denominador: $a^2 - u^2 \rightarrow$ arcoseno; $a^2 + u^2 \rightarrow$ arcotangente; $u^2 - a^2 \rightarrow$ arcosecante. Si aparece un trinomio cuadrático, completa cuadrados para llevarlo a una de estas tres formas ($a > 0$).

Tarea 1.7

Resuelve (solucionario paso a paso al final):

- 1) $\int \frac{1}{9+x^2} dx$
- 2) $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} dx$
- 3) $\int \frac{1}{4+9x^2} dx$
- 4) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
- 5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$
- 6) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$
- 7) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$
- 8) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx$

1.8 Integrales de funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas

Las funciones hiperbólicas se definen a partir de la exponencial:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \int \sinh x dx &= \cosh x + C & \int \cosh x dx &= \sinh x + C \\ \int \operatorname{sech}^2 x dx &= \tanh x + C & \int \operatorname{csch}^2 x dx &= -\coth x + C \\ \int \operatorname{sech} x \tanh x dx &= -\operatorname{sech} x + C & \int \operatorname{csch} x \coth x dx &= -\operatorname{csch} x + C\end{aligned}$$



Las hiperbólicas modelan situaciones reales, como la forma de un cable colgante (la catenaria, $y = \cosh x$). Sus fórmulas de integración son idénticas a las trigonométricas salvo algunos signos, porque provienen de e^x en lugar de senos y cosenos. Las inversas resuelven formas parecidas a las de 1.7 con los signos de los cuadrados cambiados:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sinh^{-1}(u/a) + C$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}(u/a) + C, \quad u > a$$
$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1}(u/a) + C, \quad |u| < a$$

Tarea 1.8

Resuelve (solucionario paso a paso al final):

- 1) $\int \sinh 4x \, dx$
- 2) $\int \cosh \frac{x}{2} \, dx$
- 3) $\int \operatorname{sech}^2 3x \, dx$
- 4) $\int x \sinh x^2 \, dx$
- 5) $\int \tanh x \, dx$
- 6) $\int \cosh x \sinh^2 x \, dx$
- 7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} \, dx$
- 8) $\int \frac{1}{9 - x^2} \, dx$



FORMULARIO — Todas las fórmulas de integración

Reglas básicas

$$\begin{aligned}\int dx &= x + C \\ \int k f dx &= k \int f dx \\ \int (f \pm g) dx &= \int f dx \pm \int g dx \\ \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C\end{aligned}$$

Sustitución

$$\begin{aligned}\int f(g)g' dx &= F(g) + C \\ \int g^n g' dx &= \frac{g^{n+1}}{n+1} + C \\ \int \frac{du}{u} &= \ln|u| + C\end{aligned}$$

Exponenciales

$$\begin{aligned}\int e^u du &= e^u + C \\ \int a^u du &= \frac{a^u}{\ln a} + C\end{aligned}$$

Trigonométricas inversas

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} &= \arcsen \frac{u}{a} + C \\ \int \frac{du}{a^2 + u^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \\ \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} &= \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} |u/a| + C\end{aligned}$$

Trigonométricas

$$\begin{aligned}\int \sen x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sen x + C \\ \int \sec^2 x dx &= \tan x + C \\ \int \csc^2 x dx &= -\cot x + C \\ \int \sec x \tan x dx &= \sec x + C \\ \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + C \\ \int \tan x dx &= -\ln|\cos x| + C \\ \int \cot x dx &= \ln|\sen x| + C \\ \int \sec x dx &= \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int \csc x dx &= \ln|\csc x - \cot x| + C\end{aligned}$$

Hiperbólicas

$$\begin{aligned}\int \sinh x dx &= \cosh x + C \\ \int \cosh x dx &= \sinh x + C \\ \int \operatorname{sech}^2 x dx &= \tanh x + C \\ \int \operatorname{csch}^2 x dx &= -\coth x + C \\ \int \operatorname{sech} x \tanh x dx &= -\operatorname{sech} x + C \\ \int \operatorname{csch} x \coth x dx &= -\operatorname{csch} x + C\end{aligned}$$



Solucionario paso a paso

Solucionario — Tarea 1.2 (reglas básicas)

1) $\int (4x^3 - 6x^2 + 2x - 5) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

El integrando ya es una suma de potencias: se integra término a término.

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$4 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + C$$

2) $\int (\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

$$\int (x^{1/2} - 3x^{1/3}) dx$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$\frac{x^{3/2}}{3/2} - 3 \cdot \frac{x^{4/3}}{4/3}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{9}{4}x^{4/3} + C$$

3) $\int \frac{5}{x^4} dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

$$\int 5x^{-4} dx$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$5 \cdot \frac{x^{-3}}{-3}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= -\frac{5}{3x^3} + C$$

4) $\int \frac{2x^5 - x^3 + 7}{x^2} dx$

Paso 1. Se divide cada término del numerador entre x^2 ; no existe regla del cociente para integrar.

$$\int (2x^3 - x + 7x^{-2}) dx$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 7 \cdot \frac{x^{-1}}{-1}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{x} + C$$

5) $\int (t^2 + 1)^2 dt$

Paso 1. No hay regla del producto: primero se desarrolla el cuadrado.

$$(t^2 + 1)^2 = t^4 + 2t^2 + 1$$

Paso 2. Se integra la suma resultante.

$$\int (t^4 + 2t^2 + 1) dt$$

Paso 3. Se aplica la regla de la potencia a cada término.

$$= \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$$



6) $\int 3\sqrt{x}(x - 2) dx$

Paso 1. Se distribuye el producto usando $\sqrt{x} = x^{(1/2)}$.

$$3x^{1/2}(x - 2) = 3x^{3/2} - 6x^{1/2}$$

Paso 2. Se integra cada potencia.

$$3 \cdot \frac{x^{5/2}}{5/2} - 6 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= \frac{6}{5}x^{5/2} - 4x^{3/2} + C$$

7) $\int (2 - 3x)^2 dx$

Paso 1. Se desarrolla el binomio al cuadrado.

$$(2 - 3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2$$

Paso 2. Se integra término a término.

$$4x - 12 \cdot \frac{x^2}{2} + 9 \cdot \frac{x^3}{3}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= 4x - 6x^2 + 3x^3 + C$$

8) $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx$

Paso 1. Se factoriza el numerador como diferencia de cuadrados.

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Paso 2. Se cancela el factor común (válido para $x \neq 1$).

$$\int (x + 1) dx$$

Paso 3. Se integra.

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

Solucionario — Tarea 1.3 (sustitución)

1) $\int \sqrt[3]{3x - 4} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 3x - 4, \quad du = 3 dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{3}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{3} \int u^{1/3} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} u^{4/3} = \frac{1}{4} u^{4/3}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{4} (3x - 4)^{4/3} + C$$

2) $\int x(2x^2 + 1)^6 dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 2x^2 + 1, \quad du = 4x dx \quad \Rightarrow \quad x dx = \frac{du}{4}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{4} \int u^6 du$$



Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{u^7}{7} = \frac{u^7}{28}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{28} (2x^2 + 1)^7 + C$$

3) $\int \frac{s}{\sqrt{3s^2 + 1}} ds$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 3s^2 + 1, \quad du = 6s ds \quad \Rightarrow \quad s ds = \frac{du}{6}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{6} \int u^{-1/2} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{6} \cdot 2u^{1/2} = \frac{1}{3} \sqrt{u}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{3} \sqrt{3s^2 + 1} + C$$

4) $\int x^5 (x^3 + 3)^{1/4} dx$

Paso 1. Se sustituye la parte interna y se despeja el factor sobrante x^3 .

$$u = x^3 + 3, \quad x^3 = u - 3, \quad x^2 dx = \frac{du}{3}$$

Paso 2. Se escribe $x^5 = x^3 \cdot x^2$ y se reemplaza todo.

$$\frac{1}{3} \int (u - 3) u^{1/4} du = \frac{1}{3} \int (u^{5/4} - 3u^{1/4}) du$$

Paso 3. Se antideriva cada potencia.

$$\frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} u^{9/4} - \frac{12}{5} u^{5/4} \right)$$

Paso 4. Se regresa a x .

$$= \frac{4}{27} (x^3 + 3)^{9/4} - \frac{4}{5} (x^3 + 3)^{5/4} + C$$

5) $\int \sin \frac{x}{3} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = \frac{x}{3}, \quad du = \frac{1}{3} dx \quad \Rightarrow \quad dx = 3 du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$3 \int \sin u du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$3(-\cos u) = -3 \cos u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= -3 \cos \frac{x}{3} + C$$

6) $\int \frac{1}{2} t \cos 4t^2 dt$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 4t^2, \quad du = 8t dt \quad \Rightarrow \quad t dt = \frac{du}{8}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \int \cos u \, du = \frac{1}{16} \int \cos u \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{16} \operatorname{sen} u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{16} \operatorname{sen} 4t^2 + C$$

7) $\int \csc^2 2\theta \, d\theta$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 2\theta, \quad du = 2 \, d\theta \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int \csc^2 u \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{2} (-\cot u)$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= -\frac{1}{2} \cot 2\theta + C$$

8) $\int r^2 \sec^2 r^3 \, dr$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = r^3, \quad du = 3r^2 \, dr \quad \Rightarrow \quad r^2 \, dr = \frac{du}{3}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{3} \int \sec^2 u \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{3} \tan u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{3} \tan r^3 + C$$

9) $\int \cos x (2 + \operatorname{sen} x)^5 \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 2 + \operatorname{sen} x, \quad du = \cos x \, dx$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int u^5 \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{u^6}{6}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{6} (2 + \operatorname{sen} x)^6 + C$$

10) $\int \frac{4 \operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2} \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 1 + \cos x, \quad du = -\operatorname{sen} x \, dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x \, dx = -du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.



$$-4 \int u^{-2} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$-4(-u^{-1}) = \frac{4}{u}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{4}{1 + \cos x} + C$$

11) $\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x} \frac{dx}{x^2}}$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 1 + \frac{1}{3x}, \quad du = -\frac{dx}{3x^2} \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -3 du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$-3 \int u^{1/2} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$-3 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = -2u^{3/2}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= -2 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3/2} + C$$

12) $\int \sin 2x \sqrt{2 - \cos 2x} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 2 - \cos 2x, \quad du = 2 \sin 2x dx$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int u^{1/2} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} u^{3/2}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{3} (2 - \cos 2x)^{3/2} + C$$

13) $\int \cos^2 t \sin t dt$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = \cos t, \quad du = -\sin t dt \Rightarrow \sin t dt = -du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$-\int u^2 du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$-\frac{u^3}{3}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= -\frac{1}{3} \cos^3 t + C$$

14) $\int (\tan 2x + \cot 2x)^2 dx$

Paso 1. Se desarrolla el cuadrado del binomio.

$$(\tan 2x + \cot 2x)^2 = \tan^2 2x + 2 + \cot^2 2x$$

Paso 2. Se usan las identidades $\tan^2 = \sec^2 - 1$ y $\cot^2 = \csc^2 - 1$; los -1 y el $+2$ se cancelan.

$$\sec^2 2x + \csc^2 2x$$

Paso 3. Se sustituye $u = 2x$, $du = 2 dx$.

$$\frac{1}{2} \int (\sec^2 u + \csc^2 u) du = \frac{1}{2} (\tan u - \cot u)$$

Paso 4. Se regresa a x .

$$= \frac{1}{2} \tan 2x - \frac{1}{2} \cot 2x + C$$

15) $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^3 + 3x^2 + 1, \quad du = 3(x^2 + 2x) dx$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{3} \int u^{-1/2} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{3} \cdot 2u^{1/2} = \frac{2}{3} \sqrt{u}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + C$$

16) $\int \sqrt{3+s} (s+1)^2 ds$

Paso 1. Se sustituye la raíz y se despeja el otro factor.

$$u = 3 + s, \quad s + 1 = u - 2, \quad ds = du$$

Paso 2. Se reemplaza y se desarrolla el cuadrado.

$$\int u^{1/2} (u - 2)^2 du = \int (u^{5/2} - 4u^{3/2} + 4u^{1/2}) du$$

Paso 3. Se antideriva cada potencia.

$$\frac{2}{7} u^{7/2} - \frac{8}{5} u^{5/2} + \frac{8}{3} u^{3/2}$$

Paso 4. Se regresa a s .

$$= \frac{2}{7} (3 + s)^{7/2} - \frac{8}{5} (3 + s)^{5/2} + \frac{8}{3} (3 + s)^{3/2} + C$$

17) $\int \frac{(\sqrt[3]{r} + 2)^4}{r^{2/3}} dr$

Paso 1. Se sustituye la raíz cúbica completa y se despeja r .

$$u = r^{1/3}, \quad r = u^3, \quad dr = 3u^2 du$$

Paso 2. Como $r^{(2/3)} = u^2$, el factor u^2 se cancela con el de dr .

$$\int \frac{(u + 2)^4}{u^2} \cdot 3u^2 du = 3 \int (u + 2)^4 du$$

Paso 3. Se antideriva.

$$3 \cdot \frac{(u + 2)^5}{5}$$

Paso 4. Se regresa a r .

$$= \frac{3}{5} (\sqrt[3]{r} + 2)^5 + C$$

18) $\int \frac{x^3}{(x^2 + 4)^{3/2}} dx$

Paso 1. Se sustituye y se separa $x^3 = x^2 \cdot x$ para usar el diferencial.

$$u = x^2 + 4, \quad x^2 = u - 4, \quad x dx = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reemplaza y se separa la fracción.

$$\frac{1}{2} \int (u - 4) u^{-3/2} du = \frac{1}{2} \int (u^{-1/2} - 4u^{-3/2}) du$$

Paso 3. Se antideriva.



$$\frac{1}{2}(2u^{1/2} + 8u^{-1/2}) = u^{1/2} + 4u^{-1/2}$$

Paso 4. Se regresa a x .

$$= \sqrt{x^2 + 4} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$$

19) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}} dx$

Paso 1. Se sustituye y se despeja x^2 para eliminar la variable original.

$$u = 1 - 2x^2, \quad x^2 = \frac{1-u}{2}, \quad x dx = -\frac{du}{4}$$

Paso 2. Se escribe $x^3 dx = x^2(x dx)$ y se reemplaza.

$$\frac{1}{8} \int (u-1)u^{-1/2} du = \frac{1}{8} \int (u^{1/2} - u^{-1/2}) du$$

Paso 3. Se antideriva.

$$\frac{1}{8} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} - 2u^{1/2} \right)$$

Paso 4. Se regresa a x .

$$= \frac{1}{12} (1 - 2x^2)^{3/2} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - 2x^2} + C$$

20) $\int \sen x \sen(\cos x) dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = \cos x, \quad du = -\sen x dx \Rightarrow \sen x dx = -du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$- \int \sen u du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$-(-\cos u) = \cos u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \cos(\cos x) + C$$

Solucionario — Tarea 1.3 complementaria

C1) $\int 3x^2(x^3 + 5)^4 dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^3 + 5, \quad du = 3x^2 dx \text{ (ya aparece completo)}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int u^4 du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{u^5}{5}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{5} (x^3 + 5)^5 + C$$

C2) $\int x \sqrt{x^2 + 4} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^2 + 4, \quad du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int u^{1/2} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} u^{3/2}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{3} (x^2 + 4)^{3/2} + C$$

C3) $\int \frac{\cos x}{(1 + \sen x)^2} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 1 + \sen x, \quad du = \cos x \, dx$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int u^{-2} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$-u^{-1} = -\frac{1}{u}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= -\frac{1}{1 + \sen x} + C$$

C4) $\int \sen^5 x \cos x \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = \sen x, \quad du = \cos x \, dx$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int u^5 du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{u^6}{6}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{6} \sen^6 x + C$$

C5) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^3 + 1, \quad du = 3x^2 \, dx \Rightarrow x^2 \, dx = \frac{du}{3}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{3} \int u^{1/2} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{9} u^{3/2}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{3/2} + C$$

C6) $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x-5)^3} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^2 + 3x - 5, \quad du = (2x + 3) \, dx \quad (\text{ya aparece completo})$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int u^{-3} du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{u^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2u^2}$$



Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= -\frac{1}{2(x^2 + 3x - 5)^2} + C$$

C7) $\int \sec^2 x \tan^3 x \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = \tan x, \quad du = \sec^2 x \, dx$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int u^3 \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{u^4}{4}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x + C$$

C8) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^2 + 2x + 3, \quad du = 2(x+1) \, dx \Rightarrow (x+1) \, dx = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int u^{-1/2} \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} = \sqrt{u}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \sqrt{x^2 + 2x + 3} + C$$

Solucionario — Tarea 1.4 (trigonómicas y potencia)

1) $\int 2x^7 \, dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

$$\int 2x^7 \, dx \quad (\text{la constante sale de la integral})$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$2 \cdot \frac{x^8}{8}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= \frac{1}{4} x^8 + C$$

2) $\int \frac{1}{x^3} \, dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

$$\int x^{-3} \, dx$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$\frac{x^{-2}}{-2}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= -\frac{1}{2x^2} + C$$

3) $\int 10 \sqrt[3]{x^2} \, dx$



Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

$$\int 10 x^{2/3} dx$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$10 \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} = 10 \cdot \frac{3}{5} x^{5/3}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= 6x^{5/3} + C$$

4) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

$$\int 2x^{-1/3} dx$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$2 \cdot \frac{x^{2/3}}{2/3} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{2/3}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= 3x^{2/3} + C$$

5) $\int x^4(5 - x^2) dx$

Paso 1. Se distribuye el producto (no hay regla del producto).

$$x^4(5 - x^2) = 5x^4 - x^6$$

Paso 2. Se integra cada potencia.

$$5 \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C$$

6) $\int (2 + 3x^2 - 8x^3) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

El integrando ya es una suma de potencias.

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$2x + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^4}{4}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= 2x + x^3 - 2x^4 + C$$

7) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5 \right) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

$$\int (2x^{-3} + 3x^{-2} + 5) dx$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 5x$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$$

8) $\int \frac{x^2 + 4x + 4}{\sqrt{x}} dx$

Paso 1. Se divide cada término entre $\sqrt{x} = x^{(1/2)}$.

$$\int (x^{3/2} + 4x^{1/2} + 4x^{-1/2}) dx$$

Paso 2. Se antideriva cada potencia.



$$\frac{x^{5/2}}{5/2} + 4 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + 4 \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} + 8x^{1/2} + C$$

9) $\int (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

$$\int (x^{1/3} + x^{-1/3}) dx$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$\frac{x^{4/3}}{4/3} + \frac{x^{2/3}}{2/3}$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C$$

10) $\int (5 \cos x - 4 \sin x) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

Son dos integrales trigonométricas inmediatas.

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$5(\sin x) - 4(-\cos x)$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= 5 \sin x + 4 \cos x + C$$

11) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

Paso 1. Se separa la fracción para reconocer una fórmula conocida.

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

Paso 2. Se aplica $\int \sec x \tan x dx = \sec x$.

$$\int \tan x \sec x dx$$

Paso 3. Resultado.

$$= \sec x + C$$

12) $\int (4 \csc x \cot x + 2 \sec^2 x) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

Cada término es una integral trigonométrica inmediata.

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$4(-\csc x) + 2(\tan x)$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= -4 \csc x + 2 \tan x + C$$

13) $\int (3 \csc^2 t - 5 \sec t \tan t) dt$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

Cada término es una integral trigonométrica inmediata.

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$3(-\cot t) - 5(\sec t)$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= -3 \cot t - 5 \sec t + C$$

Solucionario — Tarea 1.4 complementaria



C1) $\int (2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

Integrales inmediatas de seno y coseno.

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$2(-\cos x) + 3(\operatorname{sen} x)$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= -2 \cos x + 3 \operatorname{sen} x + C$$

C2) $\int (\sec^2 x - \csc^2 x) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

$$\int \sec^2 x dx - \int \csc^2 x dx$$

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$\tan x - (-\cot x)$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= \tan x + \cot x + C$$

C3) $\int (5 \sec x \tan x + 2 \csc x \cot x) dx$

Paso 1. Se reescribe el integrando como potencias o como una fórmula conocida.

Ambos términos son integrales inmediatas.

Paso 2. Se antideriva término a término.

$$5(\sec x) + 2(-\csc x)$$

Paso 3. Se simplifica.

$$= 5 \sec x - 2 \csc x + C$$

C4) $\int (1 + \tan^2 x) dx$

Paso 1. Se reconoce la identidad pitagórica $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.

$$\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \sec^2 x dx$$

Paso 2. Se aplica la fórmula directa.

$$= \tan x + C$$

C5) $\int \tan^2 x dx$

Paso 1. $\tan^2 x$ no tiene antiderivada directa; se despeja de la identidad.

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

Paso 2. Se integra la diferencia.

$$\int (\sec^2 x - 1) dx$$

Paso 3. Se antideriva cada término.

$$= \tan x - x + C$$

C6) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$

Paso 1. Se separa la fracción en dos factores conocidos.

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \csc x \cot x$$

Paso 2. Se aplica $\int \csc x \cot x dx = -\csc x$.

$$= -\csc x + C$$

C7) $\int (3 - 2 \cot^2 x) dx$

Paso 1. Se sustituye $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

$$3 - 2(\csc^2 x - 1) = 5 - 2 \csc^2 x$$

Paso 2. Se integra la expresión resultante.

$$\int (5 - 2 \csc^2 x) dx$$

Paso 3. Se antideriva: la de $\csc^2$ es $-\cot$.



$$= 5x + 2 \cot x + C$$

C8) $\int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx$

Paso 1. Se usa la identidad $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ en el denominador.

$$\frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Paso 2. Se separa como en el ejercicio 11 de la tarea anterior.

$$\int \tan x \sec x dx$$

Paso 3. Resultado.

$$= \sec x + C$$

Solucionario — Tarea 1.5 (logaritmo natural)

1) $\int \frac{1}{x+3} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x + 3, \quad du = dx$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int \frac{du}{u}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\ln|u|$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \ln|x + 3| + C$$

2) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^2 + 1, \quad du = 2x dx \quad (\text{el numerador ya es } du)$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int \frac{du}{u}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\ln|u|$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \ln(x^2 + 1) + C$$

3) $\int \frac{1}{2x-5} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 2x - 5, \quad du = 2 dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{2} \ln|u|$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{2} \ln|2x - 5| + C$$

4) $\int \frac{3x^2}{x^3 + 4} dx$



Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^3 + 4, \quad du = 3x^2 dx \quad (\text{el numerador ya es } du)$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int \frac{du}{u}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\ln|u|$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \ln|x^3 + 4| + C$$

$$5) \int \frac{x+1}{x^2+2x+7} dx$$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^2 + 2x + 7, \quad du = 2(x+1) dx \Rightarrow (x+1) dx = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{2} \ln|u|$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 7| + C$$

$$6) \int \tan 3x dx$$

Paso 1. Se sustituye el argumento de la tangente.

$$u = 3x, \quad du = 3 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

Paso 2. Se reescribe la integral.

$$\frac{1}{3} \int \tan u du$$

Paso 3. Se aplica la fórmula $\int \tan u du = -\ln|\cos u|$ (que proviene del patrón u'/u).

$$-\frac{1}{3} \ln|\cos u|$$

Paso 4. Se regresa a x .

$$= -\frac{1}{3} \ln|\cos 3x| + C$$

$$7) \int \frac{4}{1-x} dx$$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 1 - x, \quad du = -dx \Rightarrow dx = -du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$-4 \int \frac{du}{u}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$-4 \ln|u|$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= -4 \ln|1 - x| + C$$

$$8) \int \cot \frac{x}{2} dx$$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.



$$u = \frac{x}{2}, \quad du = \frac{1}{2} dx \Rightarrow dx = 2 du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$2 \int \cot u \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$2 \ln|\sen u|$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= 2 \ln|\sen \frac{x}{2}| + C$$

Solucionario — Tarea 1.6 (exponencial)

1) $\int e^{5x} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 5x, \quad du = 5 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{5}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{5} \int e^u du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{5} e^u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{5} e^{5x} + C$$

2) $\int x e^{x^2} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^2, \quad du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int e^u du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{2} e^u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

3) $\int 3^x dx$

Paso 1. No hace falta sustituir: es la fórmula directa de la exponencial de base a .

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Paso 2. Se aplica con $a = 3$.

$$= \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

4) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 1 + e^x, \quad du = e^x dx \text{ (el numerador ya es } du\text{)}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.



$$\int \frac{du}{u}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\ln|u|$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \ln(1 + e^x) + C$$

5) $\int e^{\cos x} \sen x \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = \cos x, \quad du = -\sen x \, dx \quad \Rightarrow \quad \sen x \, dx = -du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$- \int e^u \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$- e^u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= -e^{\cos x} + C$$

6) $\int 2x \cdot 5^{x^2} \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^2, \quad du = 2x \, dx \quad (\text{el factor } 2x \text{ ya aparece})$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int 5^u \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{5^u}{\ln 5}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{5^{x^2}}{\ln 5} + C$$

7) $\int (e^x - e^{-x}) \, dx$

Paso 1. Se integra cada término por separado.

$$\int e^x \, dx = e^x$$

Paso 2. En el segundo, $u = -x$ y $du = -dx$, de modo que aparece un signo extra.

$$\int e^{-x} \, dx = -e^{-x}$$

Paso 3. Se restan: $-(-e^{-x}) = +e^{-x}$.

$$= e^x + e^{-x} + C$$

8) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = \sqrt{x}, \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \, du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$2 \int e^u \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$2 e^u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= 2 e^{\sqrt{x}} + C$$

Solucionario — Tarea 1.7 (trigonómicas inversas)



1) $\int \frac{1}{9+x^2} dx$

Paso 1. Se reconoce la forma $a^2 + u^2$, que conduce al arcotangente.

$$9 + x^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow a = 3, u = x$$

Paso 2. Se aplica la fórmula.

$$= \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} dx$

Paso 1. Se reconoce la forma $a^2 - u^2$ bajo la raíz, que conduce al arcoseno.

$$25 - x^2 \Rightarrow a = 5, u = x$$

Paso 2. Se aplica la fórmula.

$$= \arcsen \frac{x}{5} + C$$

3) $\int \frac{1}{4+9x^2} dx$

Paso 1. El término cuadrático tiene coeficiente: se sustituye para dejarlo como u^2 .

$$u = 3x, \quad du = 3 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

Paso 2. La integral queda en la forma $a^2 + u^2$ con $a = 2$.

$$\frac{1}{3} \int \frac{du}{4 + u^2}$$

Paso 3. Se aplica la fórmula del arcotangente.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2}$$

Paso 4. Se regresa a x .

$$= \frac{1}{6} \arctan \frac{3x}{2} + C$$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 2x, \quad du = 2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{2} \arcsen u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{2} \arcsen 2x + C$$

5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^2, \quad du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .



$$\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2 + C$$

6) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = e^x, \quad du = e^x dx \quad (y e^{2x} = u^2)$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\operatorname{arcsen} u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \operatorname{arcsen} e^x + C$$

7) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$

Paso 1. El denominador no es una forma conocida: se completan cuadrados.

$$x^2 + 2x + 5 = (x^2 + 2x + 1) + 4 = (x + 1)^2 + 4$$

Paso 2. Se sustituye $u = x + 1$, $du = dx$; queda la forma $a^2 + u^2$ con $a = 2$.

$$\int \frac{du}{u^2 + 4}$$

Paso 3. Se aplica la fórmula del arcotangente.

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2}$$

Paso 4. Se regresa a x .

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$$

8) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx$

Paso 1. Se reconoce la forma $u\sqrt{(u^2 - a^2)}$, que conduce a la arcosecante.

$$x\sqrt{x^2 - 9} \Rightarrow a = 3, u = x$$

Paso 2. Se aplica la fórmula.

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arcsec} |x/3| + C$$

Solucionario — Tarea 1.8 (hiperbólicas)

1) $\int \sinh 4x dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 4x, \quad du = 4 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{4}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{4} \int \sinh u du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{4} \cosh u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.



$$= \frac{1}{4} \cosh 4x + C$$

2) $\int \cosh \frac{x}{2} dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = \frac{x}{2}, \quad du = \frac{1}{2} dx \quad \Rightarrow \quad dx = 2 du$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$2 \int \cosh u du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$2 \sinh u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= 2 \sinh \frac{x}{2} + C$$

3) $\int \operatorname{sech}^2 3x dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = 3x, \quad du = 3 dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{3}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{3} \int \operatorname{sech}^2 u du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{3} \tanh u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{3} \tanh 3x + C$$

4) $\int x \sinh x^2 dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = x^2, \quad du = 2x dx \quad \Rightarrow \quad x dx = \frac{du}{2}$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\frac{1}{2} \int \sinh u du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{1}{2} \cosh u$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{2} \cosh x^2 + C$$

5) $\int \tanh x dx$

Paso 1. $\tanh x$ no tiene fórmula directa: se escribe como cociente.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Paso 2. El numerador es la derivada del denominador: patrón u'/u .

$$u = \cosh x, \quad du = \sinh x dx$$

Paso 3. La integral queda logarítmica.

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u|$$

Paso 4. Como $\cosh x > 0$ siempre, el valor absoluto es innecesario.

$$= \ln(\cosh x) + C$$



6) $\int \cosh x \sinh^2 x \, dx$

Paso 1. Se identifica la parte interna y se calcula su diferencial.

$$u = \sinh x, \quad du = \cosh x \, dx \quad (\text{el factor } \cosh x \text{ ya aparece})$$

Paso 2. Se reescribe toda la integral en términos de u , ajustando la constante que falte.

$$\int u^2 \, du$$

Paso 3. Se antideriva en la variable u .

$$\frac{u^3}{3}$$

Paso 4. Se regresa a la variable original.

$$= \frac{1}{3} \sinh^3 x + C$$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} \, dx$

Paso 1. Se reconoce la forma $\sqrt{(u^2 + a^2)}$, propia de la hipérbola inversa.

$$x^2 + 16 = x^2 + 4^2 \Rightarrow a = 4, u = x$$

Paso 2. Se aplica la fórmula; también puede escribirse como logaritmo.

$$= \sinh^{-1} \frac{x}{4} + C$$

8) $\int \frac{1}{9 - x^2} \, dx$

Paso 1. Se reconoce la forma $a^2 - u^2$ en el denominador (sin raíz).

$$9 - x^2 \Rightarrow a = 3, u = x, \text{ con } |x| < 3$$

Paso 2. Se aplica la fórmula de la tangente hipérbola inversa.

$$= \frac{1}{3} \tanh^{-1} \frac{x}{3} + C$$