

MÓDULO II

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Teoría, formulario y ejercicios resueltos paso a paso

Cómo usar este material. Cada tema presenta la teoría con su explicación y, cuando corresponde, problemas ejemplo resueltos y una tarea con solo los enunciados. Las soluciones detalladas de todas las tareas están reunidas en el **Solucionario** al final. El **Formulario** resume en una hoja todas las fórmulas del módulo.

Unidad I — Área e integral definida

2.1 Definición de área bajo una curva

El problema es calcular el área de la región limitada por una curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, con f continua y no negativa en $[a, b]$. Como la frontera superior es curva, no existe una fórmula geométrica directa; la idea es aproximarla con rectángulos y luego refinar la aproximación.

Construcción. Se divide $[a, b]$ en n subintervalos mediante una **partición** Δ . El i -ésimo subintervalo tiene longitud $\Delta_i x$. En cada uno se elige un punto w_i y se levanta un rectángulo de altura $f(w_i)$. La suma de sus áreas es la **suma de Riemann**:

$$\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x$$

Al aumentar el número de rectángulos y hacer que el mayor de ellos tenga ancho cada vez menor (la **norma** de la partición tienda a cero), la suma se aproxima al área exacta. Por definición:

$$A = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x$$

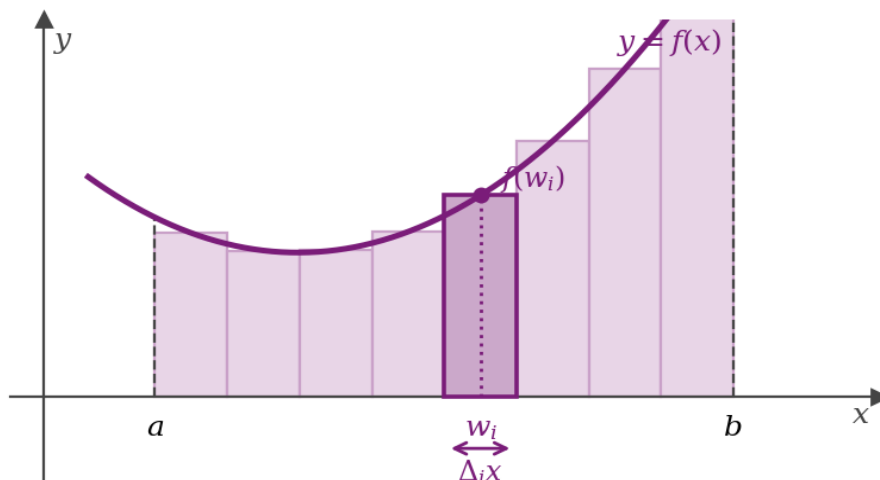


Figura 1. Aproximación del área con rectángulos: el i -ésimo tiene altura $f(w_i)$ y ancho $\Delta_i x$.

Idea clave: el área no se "mide", se define como el límite de una aproximación que mejora indefinidamente. Este mismo límite dará origen a la integral definida.

2.2 Definición de integral definida

El límite anterior tiene sentido aunque f tome valores negativos. Cuando ese límite existe, se le llama **integral definida** de f de a a b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|A| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x$$

Aquí a y b son los **límites de integración** (inferior y superior). Si el límite existe, se dice que f es **integrable** en $[a, b]$.

Criterio práctico. Toda función continua en un intervalo cerrado es integrable en él. También lo son las funciones acotadas con un número finito de discontinuidades.

Diferencia esencial: la integral indefinida $\int f(x)dx$ es una familia de funciones (lleva $+C$); la integral definida $\int$ desde a hasta b es un número real. Son objetos distintos que el Teorema Fundamental conecta.

2.3 Propiedades de la integral definida

Estas propiedades permiten manipular integrales definidas sin recalcular límites de sumas:

1. Límites iguales e inversión de límites.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

2. Linealidad. La constante sale y la integral se reparte en sumas:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

3. Aditividad respecto al intervalo. Para cualquier c (esté o no entre a y b):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. Comparación. Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces la integral es ≥ 0 . Más en general, si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

5. Acotación. Si $m \leq f(x) \leq M$ en $[a, b]$:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

6. Teorema del valor medio para integrales. Si f es continua en $[a, b]$, existe al menos un c en $[a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

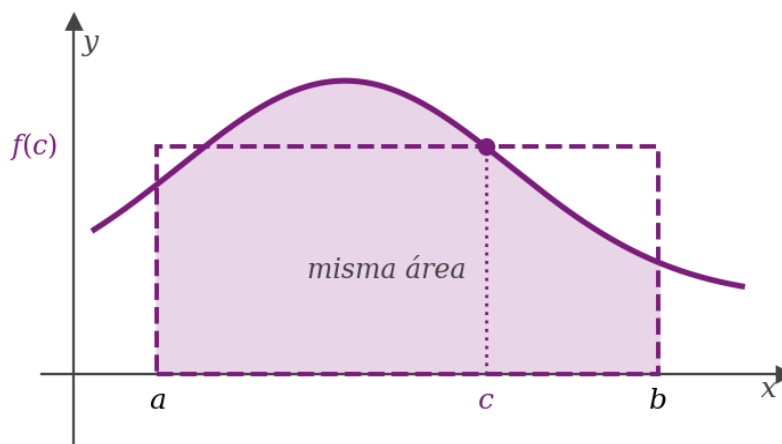


Figura 2. Teorema del valor medio: el rectángulo de altura $f(c)$ tiene la misma área que la región bajo la curva.

El número $f(c)$ es el **valor promedio** de f en el intervalo: la altura del rectángulo que tiene la misma área que la región bajo la curva.

2.4 Teorema fundamental del cálculo

Conecta las dos ramas del cálculo: derivar e integrar son operaciones inversas. Tiene dos enunciados complementarios.

Primer teorema fundamental. Sea f continua en $[a, b]$. Si se define F como la integral con extremo superior variable:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Es decir: derivar una integral con extremo superior variable devuelve el integrando. Si el extremo superior es una función $u(x)$, se aplica además la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

Segundo teorema fundamental. Sea f continua en $[a, b]$ y sea g cualquier antiderivada de f (es decir $g' = f$). Entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a)$$

Este resultado es el que permite evaluar integrales definidas **sin** calcular límites de sumas de Riemann: basta hallar una antiderivada y evaluarla en los extremos. Se usa la notación:

$$\int_a^b f(x) dx = [g(x)]_a^b$$

Ventaja: la constante de integración no hace falta: al restar $g(b) - g(a)$ se cancela. Por eso en integrales definidas nunca se escribe $+C$.



Cambio de variable: al sustituir $u = g(x)$ en una integral definida, deben cambiarse también los límites a los valores correspondientes de u ; así se evita regresar a la variable original.

Problemas ejemplo

► $\int_{-1}^1 (x^{4/3} + 4x^{1/3}) dx$

Paso 1. Se halla una antiderivada de cada término con la regla de la potencia (sumar 1 al exponente y dividir).

$$\int x^{4/3} dx = \frac{x^{7/3}}{7/3} = \frac{3}{7}x^{7/3}$$

$$\int 4x^{1/3} dx = 4 \cdot \frac{x^{4/3}}{4/3} = 3x^{4/3}$$

Paso 2. Se aplica el segundo TFC: $g(b) - g(a)$, con $g(x) = (3/7)x^{7/3} + 3x^{4/3}$.

$$g(1) = \frac{3}{7} + 3$$

Paso 3. En $x = -1$ se usa $(-1)^{7/3} = -1$ y $(-1)^{4/3} = 1$.

$$g(-1) = -\frac{3}{7} + 3$$

Paso 4. Se restan.

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{3}{7} + 3\right) - \left(-\frac{3}{7} + 3\right) \\ &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

► $\frac{d}{dx} \int_3^{x^2} \sqrt{\cos t} dt$

Paso 1. El extremo superior no es x sino x^2 : se trata de una función compuesta, así que hace falta la regla de la cadena.

Paso 2. Se nombra la parte interna y se deriva.

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

Paso 3. Por el primer TFC, derivar la integral devuelve el integrando evaluado en u , multiplicado por du/dx .

$$\frac{d}{dx} \int_3^u \sqrt{\cos t} dt = \sqrt{\cos u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Paso 4. Se sustituye $u = x^2$ y $du/dx = 2x$.

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\cos x^2} \cdot 2x \\ &= 2x \sqrt{\cos x^2} \end{aligned}$$

Tarea 2.4

Evalúa o deriva según corresponda (solucionario paso a paso al final):

1) $\int_1^4 (3x^2 - 2x + 1) dx$

2) $\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

3) $\int_0^{\pi/2} \sen x dx$

4) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

5) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx$

6) $\int_{-1}^2 (x^3 - 3x) dx$

7) $\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{dt}{t^3 + 1}$

8) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$

2.5 La integral como área de una región

Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, la integral definida coincide exactamente con el área de la región bajo la curva:

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{unidades cuadradas})$$

Cuando f toma valores negativos, la integral cuenta esa porción con signo negativo. Por eso la integral mide el **área neta con signo**: el área que queda por encima del eje x menos la que queda por debajo.

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2$$

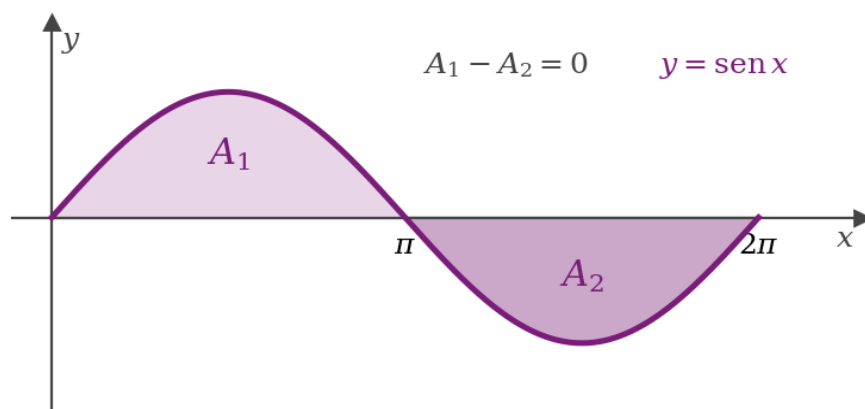


Figura 3. Área con signo: A_1 (sobre el eje) cuenta positiva y A_2 (bajo el eje) negativa; para $y = \text{sen } x$ en $[0, 2\pi]$ se cancelan.

Un ejemplo típico es $\int$ de 0 a 2π de $\text{sen } x$; las dos mitades de la onda tienen áreas iguales pero signos opuestos, así que la integral vale 0 aunque el área real encerrada no lo sea. Para obtener el **área total** (siempre positiva) se integra el valor absoluto, o se divide el intervalo en los puntos donde f cambia de signo y se suman los valores absolutos.

Evaluación geométrica: cuando el integrando describe una figura conocida —recta, semicircunferencia, valor absoluto— la integral puede obtenerse con fórmulas de área elemental, sin antiderivar. Por ejemplo, $\sqrt{a^2 - x^2}$ representa una semicircunferencia de radio a .

Tarea 2.5

Evalúa cada integral interpretándola como un área (usa fórmulas geométricas; solucionario al final):

- 1) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$
- 2) $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$
- 3) $\int_{-2}^4 x dx$
- 4) $\int_0^4 (3 - x) dx$
- 5) $\int_{-2}^4 |x| dx$
- 6) $\int_{-3}^3 |1 - x| dx$

7) $\int_0^8 (6 - |x - 2|) dx$

8) $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2} dx$

2.6 Área de la región entre curvas

Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, el área entre ambas curvas se obtiene integrando la diferencia de alturas. Cada elemento rectangular **vertical** tiene altura $f(x) - g(x)$ y ancho dx :

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

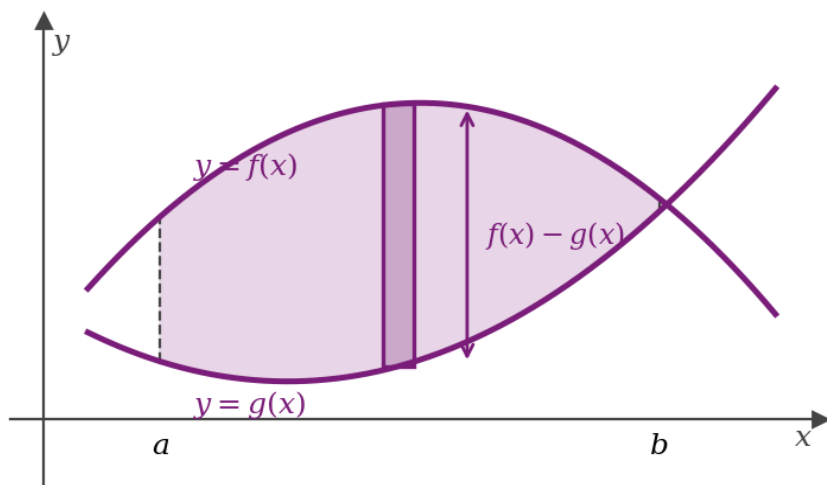


Figura 4. Elemento rectangular vertical: su altura es la distancia $f(x) - g(x)$ y su ancho dx .

Regla mnemotécnica: *arriba menos abajo*. La fórmula es válida aunque las curvas estén total o parcialmente bajo el eje x , porque lo que se integra es la **distancia vertical** entre ellas, que siempre es positiva.

Curvas que se cruzan. Si las curvas se intersectan dentro del intervalo, cambia cuál está arriba. Hay que dividir la región en subregiones en los puntos de corte e integrar cada tramo con el orden correcto:

$$A = \int_a^c [f - g] dx + \int_c^b [g - f] dx$$

Elementos horizontales. Cuando la región se describe mejor en función de y —por ejemplo si una frontera es una parábola horizontal— conviene usar rectángulos horizontales de longitud $\lambda(y) - \varphi(y)$ (derecha menos izquierda) y grosor dy :

$$A = \int_c^d [\lambda(y) - \varphi(y)] dy$$

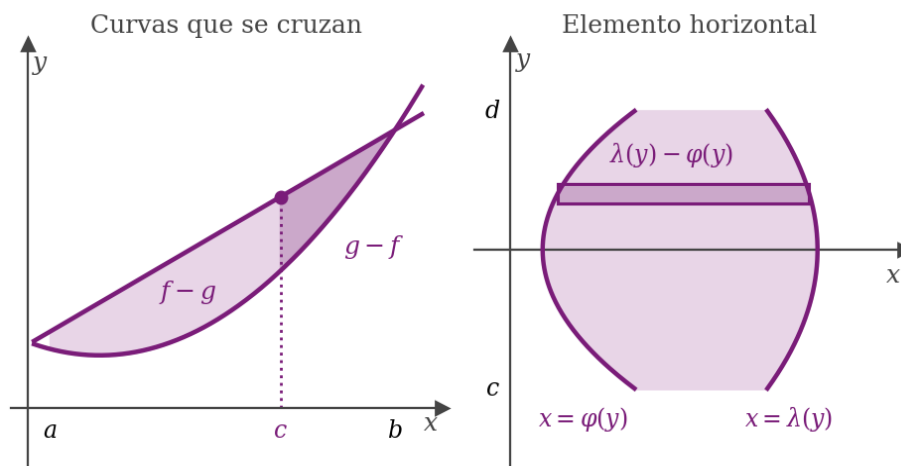


Figura 5. Izquierda: al cruzarse las curvas hay que dividir la región en c . Derecha: elemento horizontal, derecha menos izquierda.

Cómo elegir: usa elementos verticales si cada recta vertical corta la región entrando y saliendo por la misma pareja de curvas; usa horizontales si eso ocurre con las rectas horizontales. Elegir bien suele evitar dividir la región en dos.

Procedimiento paso a paso

Todo problema de área entre curvas se resuelve con los mismos cinco pasos. Se ilustran con un caso sencillo: hallar el área de la región limitada por $y = x$ y $y = x^2$.

Paso 1. Graficar las curvas e identificar la región. Basta un bosquejo: la recta y la parábola encierran una región en el primer cuadrante.

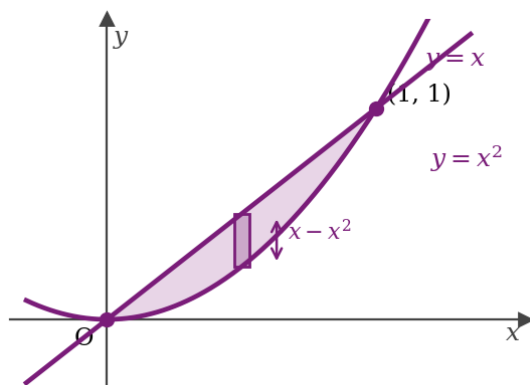


Figura 6. Región limitada por $y = x$ y $y = x^2$. El elemento vertical tiene altura $x - x^2$.

Paso 2. Hallar los puntos de intersección igualando las dos funciones.

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$$

Las soluciones $x = 0$ y $x = 1$ son los límites de integración.

Paso 3. Decidir cuál curva está arriba. Se evalúan ambas en un punto interior, por ejemplo $x = 1/2$:

$$y = x \rightarrow \frac{1}{2} \quad y = x^2 \rightarrow \frac{1}{4}$$

Como $1/2 > 1/4$, la recta está por arriba: $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.

Paso 4. Plantear la integral con "arriba menos abajo".

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx$$

Paso 5. Evaluar con el segundo teorema fundamental.

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Comprobación: el resultado siempre debe ser positivo. Si sale negativo, es señal de que se restaron las funciones en el orden equivocado.

Problemas ejemplo

► $y = x^2$; $y = -x^2 + 4x$

Paso 1. Intersecciones: se igualan las dos funciones.

$$x^2 = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) = 0$$

Los límites son $x = 0$ y $x = 2$ (puntos $(0,0)$ y $(2,4)$).

Paso 2. ¿Cuál está arriba? En $x = 1$: $-1 + 4 = 3$ contra 1. La parábola invertida va por arriba.

Paso 3. Se plantea arriba menos abajo.

$$A = \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - x^2] dx$$

Paso 4. Se simplifica el integrando.

$$= \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx$$

Paso 5. Se antideriva y se evalúa.

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8$$

$$= \frac{8}{3}$$

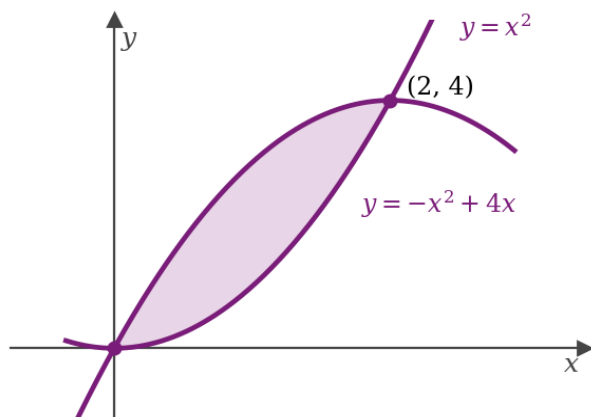


Figura 7. Región del ejemplo a): las parábolas se cortan en $(0,0)$ y $(2,4)$.

► $y = x^3 - 6x^2 + 8x$; $y = x^2 - 4x$

Paso 1. Intersecciones: se igualan y se pasa todo a un lado.

$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$x(x - 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, 3, 4$$

Paso 2. Hay tres cortes, así que la curva superior cambia. Se prueba en cada tramo:

en $x = 1$ la cúbica da 3 y la parábola -3 (la cúbica arriba); en $x = 3.5$ la cúbica da -2.6 y la parábola -1.75 (la parábola arriba).

Paso 3. Se divide la región en dos y se integra cada tramo con el orden correcto.



$$A_1 = \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x) dx = \frac{45}{4}$$
$$A_2 = \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x) dx = \frac{7}{12}$$

Paso 4. El área total es la suma de las dos.

$$= \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{135}{12} + \frac{7}{12}$$
$$= \frac{71}{6}$$

Tarea 2.6

Calcula el área de la región limitada por las curvas dadas (solucionario al final):

- 1) $y = 2 - x^2$; $y = -x$
- 2) $y = x^2$; $y = x^4$
- 3) $y = \sqrt{x}$; $y = x^3$
- 4) $y^3 = x^2$; $x - 3y + 4 = 0$
- 5) $y = \cos x - \sin x$; $x = 0$; $y = 0$
- 6) $y = \sin x$; $y = -\sin x$; $x = -\pi/2$; $x = \pi/2$
- 7) $y = |x|$; $y = x^2 - 1$; $x = -1$; $x = 1$
- 8) $x^3 = 2y^2$; $x = 0$; $y = -2$ (cuarto cuadrante)

Unidad II — Volumen de un sólido de revolución

Un **sólido de revolución** se genera al girar una región plana alrededor de una recta fija llamada **eje de revolución**. Los tres métodos siguientes se distinguen por la forma del elemento de volumen que se usa: disco, anillo o capa cilíndrica. En todos, la estrategia es la misma: rebanar el sólido, expresar el volumen de una rebanada y sumar mediante una integral.

2.7 Método del disco

Se aplica cuando la región toca el eje de giro, de modo que las rebanadas son **discos macizos**. Si se gira alrededor del eje x la región bajo $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, cada elemento rectangular **perpendicular** al eje genera un disco de radio $f(x)$ y espesor dx . Como el volumen de un disco es $\pi r^2 h$:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

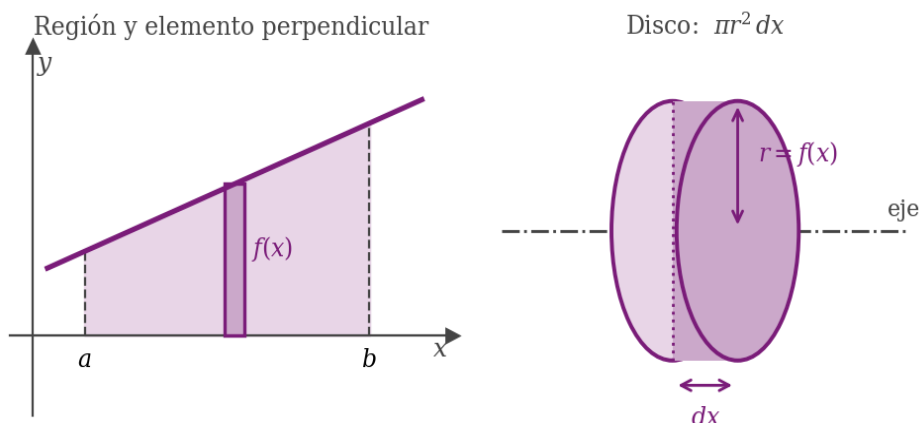


Figura 8. El elemento perpendicular al eje genera un disco macizo de radio $f(x)$ y espesor dx .

Si el giro es alrededor del eje y , se despeja $x = g(y)$ y se integra respecto a y :

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

Eje de giro desplazado. Si el eje es la recta $y = k$ (o $x = h$), el radio es la distancia de la curva al eje:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - k]^2 dx$$

Regla: el elemento rectangular debe ser perpendicular al eje de revolución y tocar el eje. Si queda un hueco entre la región y el eje, no es un disco sino un anillo (tema 2.8).

Problema ejemplo

- **La región bajo $y = x^2$, sobre el eje x , entre $x = 1$ y $x = 2$, gira alrededor del eje x .**

Paso 1. El eje de giro es el eje x y la región lo toca, así que el elemento vertical (perpendicular al eje) genera un disco macizo.

Paso 2. El radio del disco es la altura de la curva y el espesor es dx .

$$r = f(x) = x^2, \text{ espesor} = dx$$

Paso 3. Se plantea la integral con $V = \pi \int r^2 dx$ entre los límites dados.

$$V = \pi \int_1^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_1^2 x^4 dx$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{31}{5} \pi \end{aligned}$$

Tarea 2.7

En los ejercicios 1 a 4 se usa la curva $y^2 = x^3$ y los puntos $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(0,8)$, $C(4,8)$. **OAC** es la región bajo la curva (limitada por la curva, el eje x y la recta $x = 4$); **OBC** es la región sobre la curva (limitada por la curva, el eje y y la recta $y = 8$).

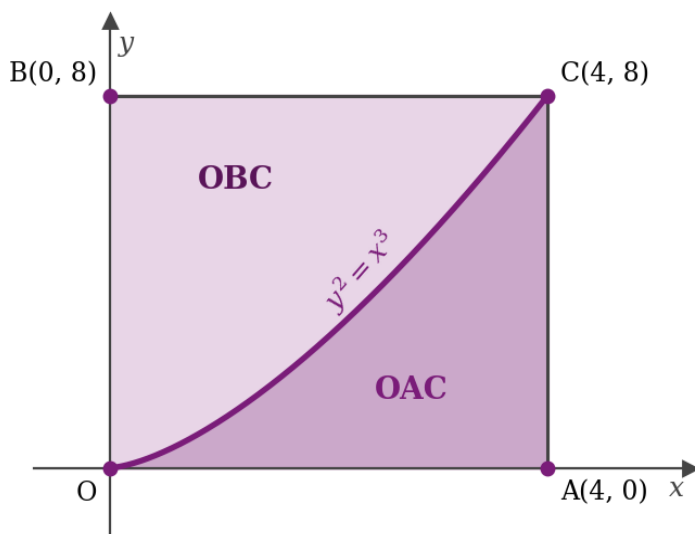


Figura 9. Regiones OAC (bajo la curva) y OBC (sobre la curva) determinadas por $y^2 = x^3$ dentro del rectángulo OACB.

- 1) OAC gira alrededor del eje x.
- 2) OBC gira alrededor del eje y.
- 3) OBC gira alrededor de la recta BC ($y = 8$).
- 4) OAC gira alrededor de la recta AC ($x = 4$).

En los ejercicios 5 a 8: calcula el volumen del sólido generado. En cada caso identifica el radio del disco (la distancia de la curva al eje de giro) y los límites de integración; en el 8 el volumen es el dato y la incógnita es c.

- 5) La región limitada por $y = \sec x$, el eje x, el eje y y la recta $x = \pi/4$ gira alrededor del eje x.
- 6) La región limitada por la recta $x = -4$ y la parábola $x = 4 + 6y - 2y^2$ gira alrededor de $x = -4$.
- 7) La región limitada por el bucle de la curva $x^2y^2 = (x^2 - 9)(1 - x^2)$ gira alrededor del eje x.
- 8) Al girar alrededor del eje x la región limitada por $y = \sqrt{2x + 4}$, el eje x, el eje y y la recta $x = c$ ($c > 0$) se genera un sólido. ¿Para qué valor de c el volumen es 12π unidades cúbicas?

2.8 Método del anillo (arandelas)

Se usa cuando la región **no toca** el eje de giro: queda un hueco y las rebanadas son **anillos** (arandelas). El volumen de un anillo es la diferencia entre el disco exterior y el interior, $\pi(R^2 - r^2)h$. Si la región está entre $y = f(x)$ (más lejos del eje) y $y = g(x)$ (más cerca), al girar alrededor del eje x:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

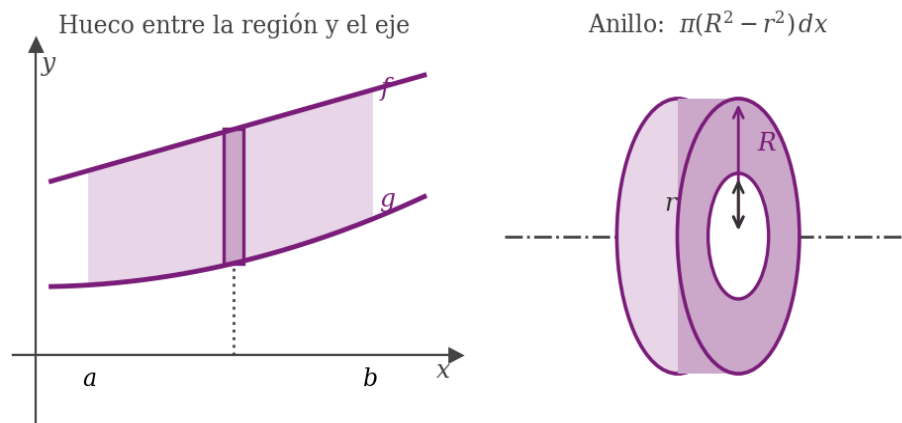


Figura 10. Como la región no toca el eje, la rebanada es un anillo de radio exterior R y radio interior r .

Eje de giro desplazado. Si el eje es $y = k$, los radios se miden desde esa recta: $R = f(x) - k$ y $r = g(x) - k$. Entonces:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2) dx$$

Cuando el eje es vertical ($x = h$) se integra respecto a y con las funciones despejadas en la forma $x = F(y)$ y $x = G(y)$.

Error frecuente: nunca se escribe $(R - r)^2$. Hay que elevar cada radio al cuadrado por separado y luego restar: $R^2 - r^2$. Son cantidades distintas.

Cómo identificar R y r : R es siempre la distancia del eje a la frontera más lejana; r la distancia a la más cercana. Conviene dibujar el segmento que va del eje a la región.

Problema ejemplo

- La región entre $y = x^2 + 1$ y $y = x + 3$ gira alrededor del eje x .

Paso 1. Intersecciones: se igualan las curvas.

$$x^2 + 1 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

Los límites son $x = -1$ y $x = 2$ (puntos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$).

Paso 2. La región no toca el eje x , así que la rebanada es un anillo. Se identifican los radios midiendo desde el eje:

$$R = x + 3 \text{ (frontera lejana)}, \quad r = x^2 + 1 \text{ (frontera cercana)}$$

Paso 3. Se plantea $V = \pi \int (R^2 - r^2) dx$. Ojo: se elevan por separado, nunca $(R - r)^2$.

$$V = \pi \int_{-1}^2 [(x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2] dx$$

Paso 4. Se desarrollan los cuadrados y se simplifica.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9, \quad (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx$$

Paso 5. Se antideriva y se evalúa en los dos límites.

$$\begin{aligned} &= \pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^2 \\ &= \pi \left[\left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 28 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 5 \right) \right] \\ &= \frac{117}{5} \pi \end{aligned}$$

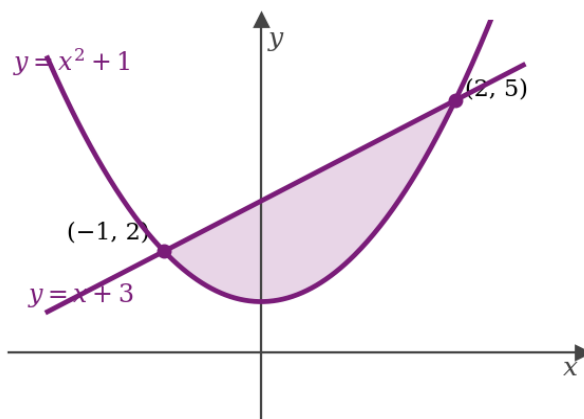


Figura 11. Región del ejemplo: la recta (frontera lejana) y la parábola (frontera cercana) se cortan en $(-1, 2)$ y $(2, 5)$.

Tarea 2.8

En los ejercicios 1 a 4 se usan otra vez las regiones de la **Figura 8**, determinadas por la curva $y^2 = x^3$ y los puntos $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(0,8)$ y $C(4,8)$:

OAC es la región *bajo* la curva: la limitada por la curva $y^2 = x^3$, el eje x y la recta $x = 4$.

OBC es la región *sobre* la curva: la limitada por la curva $y^2 = x^3$, el eje y y la recta $y = 8$.

En los ejercicios 1 a 4: como el eje de giro no toca la región, la rebanada es un anillo. Identifica primero el radio exterior R (frontera lejana al eje) y el interior r (frontera cercana), decide si los elementos son verticales (integras en x) u horizontales (integras en y) y aplica $V = \pi(R^2 - r^2)$.

- 1) OAC gira alrededor del eje y .
- 2) OAC gira alrededor de la recta BC ($y = 8$).
- 3) OBC gira alrededor de la recta AC ($x = 4$).
- 4) OBC gira alrededor del eje x .

En los ejercicios 5 a 8: calcula el volumen del sólido generado por el método del anillo. Halla primero los puntos de intersección para fijar los límites, mide R y r desde el eje de giro indicado (no desde los ejes coordenados) y recuerda elevar al cuadrado cada radio por separado.

- 5) La región limitada por las parábolas $x = y - y^2$ y $x = y^2 - 3$ gira alrededor de la recta $x = -4$.
- 6) La región limitada por $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 1$ gira alrededor del eje y (usa elementos horizontales).
- 7) La región entre $y = x^2$ y $y^2 = x$ gira alrededor del eje x (elementos perpendiculares al eje).
- 8) La región limitada por $y = \sqrt{x}$, el eje y y la recta $y = 1$ gira alrededor de la recta $y = 2$ (elementos perpendiculares al eje).

2.9 Método de las capas cilíndricas

En este método el elemento rectangular es **paralelo** al eje de revolución, y al girar genera una **capa cilíndrica** (un tubo delgado). Si se corta el tubo y se extiende, se obtiene una lámina cuyo volumen es:

$$\Delta V = 2\pi \cdot (\text{radio medio}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{espesor})$$

Partiendo del anillo $V = \pi h(R_e^2 - R_i^2) = \pi h(R_e + R_i)(R_e - R_i)$ y observando que $(R_e + R_i)/2$ es el radio medio y $R_e - R_i$ el espesor, se llega a la fórmula anterior. Al girar alrededor del eje y la región entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$:

$$V = 2\pi \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx$$

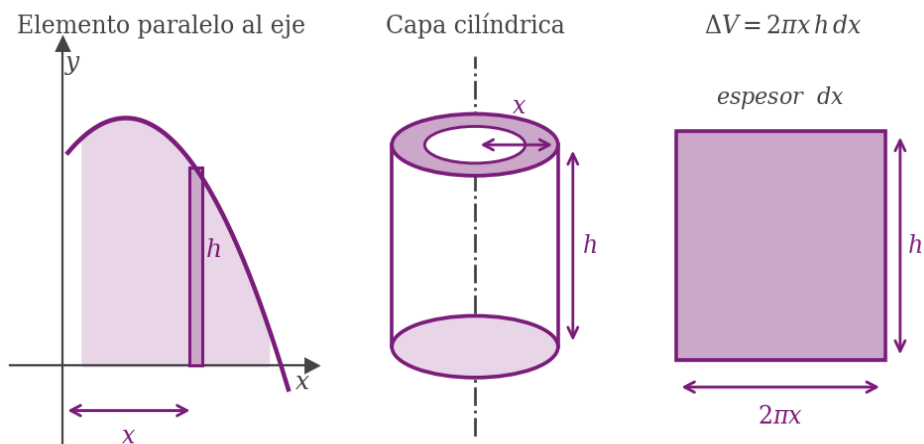


Figura 12. El elemento paralelo al eje genera una capa cilíndrica; al desplegarla es una lámina de base $2\pi x$, altura h y espesor dx .

Eje de giro desplazado. Si el eje es la recta vertical $x = h$, el radio de la capa es la distancia $|x - h|$:

$$V = 2\pi \int_a^b (x - h) [f(x) - g(x)] dx$$

Para un eje horizontal $y = k$ se intercambian los papeles: se integra respecto a y , el radio es $(y - k)$ y la altura es la diferencia horizontal $\lambda(y) - \phi(y)$.

Cuándo conviene: usa capas cuando despejar la función en la otra variable sea difícil, o cuando los elementos perpendiculares obligarían a dividir la región en varias partes. Muchos problemas admiten disco/anillo y capas: el resultado debe coincidir.

Problema ejemplo

- La región bajo $y = x^2$, sobre el eje x , entre $x = 0$ y $x = 1$, gira alrededor del eje y .

Paso 1. El eje de giro es vertical y el elemento rectangular vertical queda paralelo a él: se usan capas cilíndricas.

Paso 2. Se identifican las tres cantidades de la capa. El radio es la distancia del eje y al elemento:

$$\text{radio} = x, \quad \text{altura} = x^2, \quad \text{espesor} = dx$$

Paso 3. Se sustituye en $\Delta V = 2\pi \cdot (\text{radio}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{espesor})$ y se integra entre 0 y 1.

$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Tarea 2.9

En los ejercicios 1 a 4 se usan las regiones del cuadrado de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$: R_1 está limitada por $y = x^2$, el eje x y $x = 1$; R_2 está entre las curvas $y = x^2$ y $y^2 = x$; R_3 está limitada por $y^2 = x$, el eje y y $y = 1$. En todos usa elementos paralelos al eje de revolución.

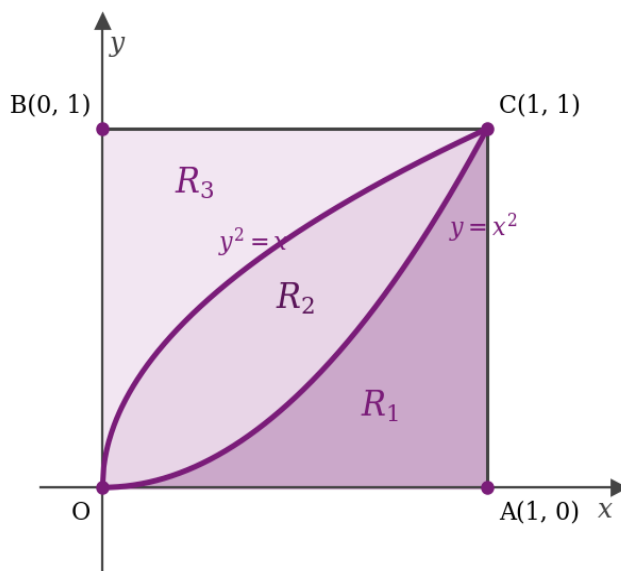


Figura 13. Regiones R_1 , R_2 y R_3 determinadas por $y = x^2$ y $y^2 = x$ en el cuadrado unitario.

- 1) R_1 gira alrededor del eje y .
- 2) R_2 gira alrededor del eje x .
- 3) R_3 gira alrededor de la recta $y = 2$.
- 4) R_2 gira alrededor de la recta $x = -2$.

En los ejercicios 5 a 8, la región acotada por las curvas $x = y^2 - 2$ y $x = 6 - y^2$ gira alrededor del eje indicado.

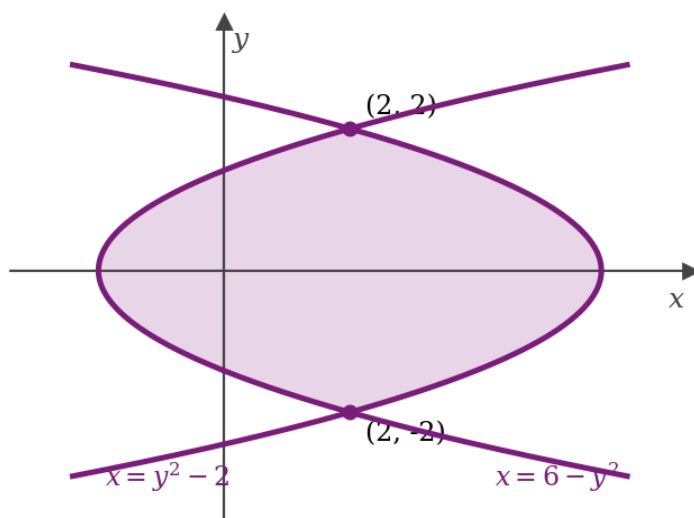


Figura 14. Región limitada por $x = y^2 - 2$ y $x = 6 - y^2$; se cortan en $(2, 2)$ y $(2, -2)$.

- 5) El eje x .
- 6) El eje y .
- 7) La recta $x = 2$.
- 8) La recta $y = 2$.



FORMULARIO — Módulo II

Definición (suma de Riemann)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|A| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x$$

Propiedades

$$\begin{aligned}\int_a^a f &= 0 \\ \int_b^a f &= - \int_a^b f \\ \int_a^b k f &= k \int_a^b f \\ \int_a^b (f \pm g) &= \int_a^b f \pm \int_a^b g \\ \int_a^b f &= \int_a^c f + \int_c^b f \\ m(b-a) &\leq \int_a^b f \leq M(b-a) \\ \int_a^b f &= f(c)(b-a)\end{aligned}$$

(valor medio: $f(c)$ es el promedio)

Teorema fundamental

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt &= f(x) \\ \frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt &= f(u)u' \\ \int_a^b f(x) dx &= g(b) - g(a)\end{aligned}$$

con $g' = f$ (no se escribe $+C$)

Áreas

$$\begin{aligned}A &= \int_a^b f(x) dx \quad (f \geq 0) \\ A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx\end{aligned}$$

elementos verticales: arriba – abajo

$$A = \int_c^d [\lambda(y) - \varphi(y)] dy$$

elementos horizontales: derecha – izquierda

Método del disco

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

giro alrededor del eje x

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

giro alrededor del eje y

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - k]^2 dx$$

giro alrededor de $y = k$

Método del anillo

$$V = \pi \int_a^b ([f]^2 - [g]^2) dx$$

R = frontera lejana, r = frontera cercana

$$V = \pi \int_a^b ([f - k]^2 - [g - k]^2) dx$$

giro alrededor de $y = k$

Capas cilíndricas

$$\Delta V = 2\pi \cdot R_m \cdot h \cdot t$$

radio medio $\times$ altura $\times$ espesor

$$V = 2\pi \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx$$

giro alrededor del eje y

$$V = 2\pi \int_a^b (x - h) [f - g] dx$$

giro alrededor de $x = h$

$$V = 2\pi \int_c^d (y - k) [\lambda - \varphi] dy$$

giro alrededor de $y = k$

Geometría útil

$\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow$ semicircunferencia de radio a

círculo: πr^2 triángulo: $\frac{bh}{2}$

trapecio: $\frac{(B + b)h}{2}$



Solucionario paso a paso

Solucionario — Tarea 2.4 (Teorema fundamental)

1) $\int_1^4 (3x^2 - 2x + 1) dx$

Paso 1. Se integra término a término con la regla de la potencia.

$$g(x) = x^3 - x^2 + x$$

Paso 2. Segundo TFC: se evalúa $g(4) - g(1)$.

$$g(4) = 64 - 16 + 4 = 52$$

$$g(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

Paso 3. Se restan.

$$= 52 - 1$$

$$= 51$$

2) $\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

Paso 1. La derivada de $x^3 + 1$ es $3x^2$, que aparece salvo una constante: conviene sustituir.

$$u = x^3 + 1, \quad du = 3x^2 dx \quad \Rightarrow \quad x^2 dx = \frac{du}{3}$$

Paso 2. Se cambian los límites a la variable u : si $x = 0$, $u = (0)^3 + 1$, $u = 1$; si $x = 2$, $u = (2)^3 + 1$, $u = 9$.

$$\frac{2}{3} \int_1^9 u^{1/2} du$$

Paso 3. Se antideriva con la regla de la potencia.

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} [u^{3/2}]_1^9$$

Paso 4. Se evalúa: $9^{(3/2)} = 27$ y $1^{(3/2)} = 1$.

$$= \frac{4}{9} (27 - 1)$$

$$= \frac{104}{9}$$

3) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

Paso 1. La antiderivada de $\sin x$ es $-\cos x$.

Paso 2. Se evalúa entre 0 y $\pi/2$.

$$-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0$$

Paso 3. $\cos(\pi/2) = 0$ y $\cos 0 = 1$.

$$= -0 + 1$$

$$= 1$$

4) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Paso 1. Se reescribe la raíz como potencia negativa.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

Paso 2. Regla de la potencia: el nuevo exponente es $-1/2 + 1 = 1/2$.

$$= [2x^{1/2}]_1^9$$

Paso 3. Se evalúa: $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{1} = 1$.

$$= 2(3) - 2(1)$$

$$= 4$$

5) $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx$



Paso 1. Es una de las integrales trigonométricas inmediatas: la antiderivada de $\sec^2 x$ es $\tan x$.

Paso 2. Se evalúa entre 0 y $\pi/4$.

$$\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0$$

Paso 3. $\tan(\pi/4) = 1$ y $\tan 0 = 0$.

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

6) $\int_{-1}^2 (x^3 - 3x) dx$

Paso 1. Regla de la potencia término a término.

$$g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2$$

Paso 2. Se evalúa en el límite superior.

$$g(2) = 4 - 6 = -2$$

Paso 3. Se evalúa en el inferior (ojo con los signos: $(-1)^4 = 1$ y $(-1)^2 = 1$).

$$g(-1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$$

Paso 4. Se restan.

$$= -2 + \frac{5}{4}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

7) $\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{dt}{t^3 + 1}$

Paso 1. El extremo superior es exactamente x , así que el primer TFC se aplica de forma directa.

Paso 2. La derivada es el integrando con t reemplazada por x ; no hace falta antiderivar.

$$= \frac{1}{x^3 + 1}$$

8) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \sqrt{1 + t^2} dt$

Paso 1. El extremo superior es una función de x , no x : hace falta la regla de la cadena.

$$u = x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$

Paso 2. Primer TFC combinado con la regla de la cadena: $f(u) \cdot u'$.

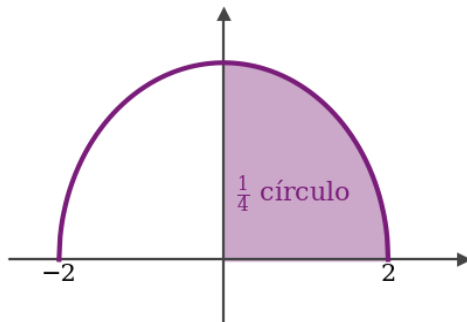
$$\sqrt{1 + u^2} \cdot 3x^2$$

Paso 3. Se sustituye $u = x^3$, de modo que $u^2 = x^6$.

$$= 3x^2 \sqrt{1 + x^6}$$

Solucionario — Tarea 2.5 (la integral como área)

1) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$



Paso 1. Se reconoce la curva: $y = \sqrt{4 - x^2}$ equivale a $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$, la semicircunferencia superior de radio 2.

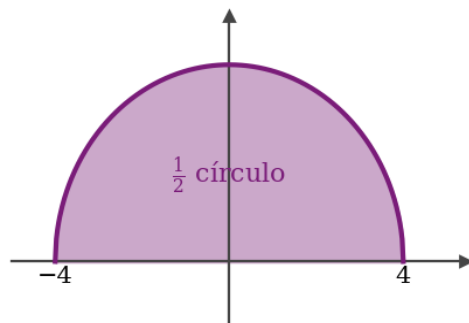
Paso 2. El intervalo $[0, 2]$ recorre solo el trozo del primer cuadrante: un cuarto de círculo.

Paso 3. Se aplica la fórmula del área del círculo con $r = 2$.

$$= \frac{1}{4} \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi (4)$$

$$= \pi$$

2) $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2} dx$



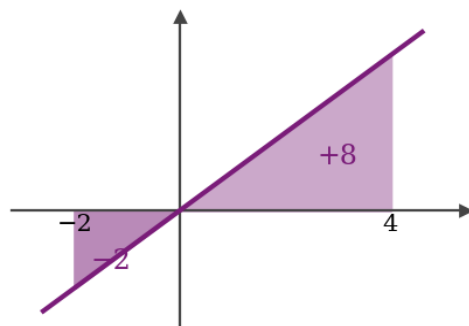
Paso 1. $y = \sqrt{16 - x^2}$ es la semicircunferencia superior de radio 4.

Paso 2. El intervalo $[-4, 4]$ la recorre completa: medio círculo.

$$= \frac{1}{2} \pi (16)$$

$$= 8\pi$$

3) $\int_{-2}^4 x dx$



Paso 1. $y = x$ es una recta por el origen; cambia de signo en $x = 0$, así que se separa el intervalo.

Paso 2. En $[0, 4]$ queda sobre el eje: triángulo de base 4 y altura 4.

$$\frac{1}{2} (4)(4) = 8$$

Paso 3. En $[-2, 0]$ queda bajo el eje: triángulo de base 2 y altura 2, que cuenta negativo.

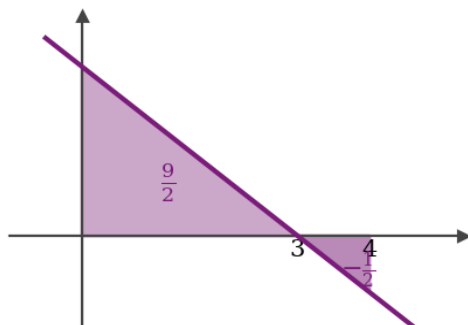
$$\frac{1}{2} (2)(2) = 2$$

Paso 4. Se restan.

$$= 8 - 2$$

$$= 6$$

4) $\int_0^4 (3 - x) dx$



Paso 1. $y = 3 - x$ es una recta que corta el eje x en $x = 3$: ahí cambia de signo.

Paso 2. En $[0, 3]$ hay un triángulo de base 3 y altura 3 (positivo).

$$\frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$$

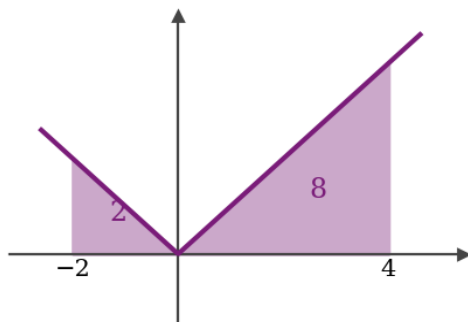
Paso 3. En $[3, 4]$ queda bajo el eje: triángulo de base 1 y altura 1 (negativo).

$$\frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 4$$

5) $\int_{-2}^4 |x| dx$



Paso 1. $|x|$ nunca es negativa, así que toda el área cuenta positiva: se suman los dos trozos.

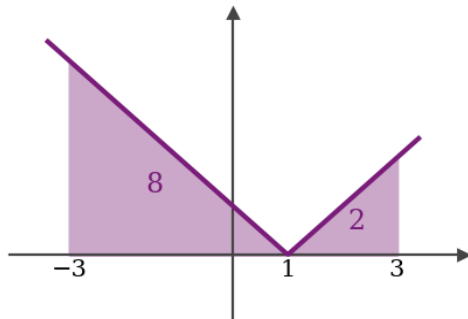
Paso 2. En $[-2, 0]$: triángulo de base 2 y altura 2.

Paso 3. En $[0, 4]$: triángulo de base 4 y altura 4.

$$= \frac{1}{2}(2)(2) + \frac{1}{2}(4)(4) = 2 + 8$$

$$= 10$$

6) $\int_{-3}^3 |1 - x| dx$





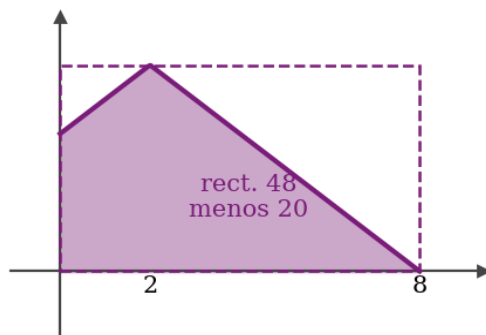
Paso 1. $y = |1 - x|$ es una V con vértice en $x = 1$, donde vale 0.

Paso 2. Se evalúan los extremos: en $x = -3$ vale 4 y en $x = 3$ vale 2.

Paso 3. Son dos triángulos, ambos sobre el eje.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(4)(4) + \frac{1}{2}(2)(2) = 8 + 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

7) $\int_0^8 (6 - |x - 2|) dx$



Paso 1. Se separa el integrando: un rectángulo de altura 6 menos la región de $|x - 2|$.

Paso 2. Rectángulo de base 8 y altura 6.

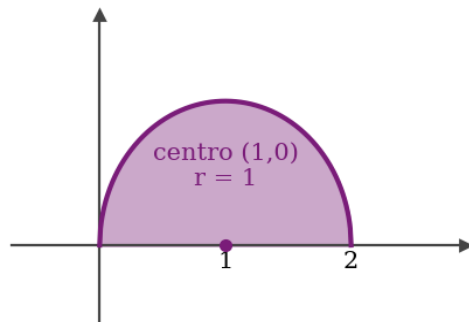
$$6(8) = 48$$

Paso 3. $|x - 2|$ tiene vértice en $x = 2$: triángulo de base 2 (altura 2) más triángulo de base 6 (altura 6).

$$2 + 18 = 20$$

$$\begin{aligned} &= 48 - 20 \\ &= 28 \end{aligned}$$

8) $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2} dx$



Paso 1. El radicando no es una forma conocida; se completa el cuadrado.

$$2x - x^2 = -(x^2 - 2x) = 1 - (x - 1)^2$$

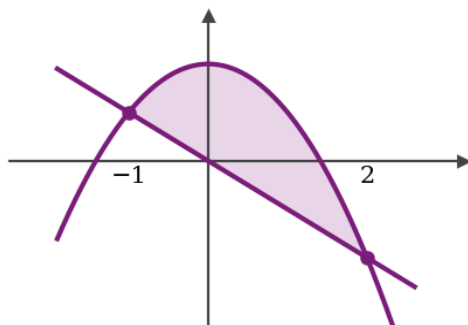
Paso 2. Entonces $y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$ es la semicircunferencia superior de centro $(1, 0)$ y radio 1.

Paso 3. El intervalo $[0, 2]$ la recorre completa: medio círculo de radio 1.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\pi(1^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Solucionario — Tarea 2.6 (área entre curvas)

1) $y = 2 - x^2$; $y = -x$



Paso 1. Intersecciones: se igualan las dos funciones.

$$2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

Los límites son $x = -1$ y $x = 2$.

Paso 2. ¿Cuál está arriba? En $x = 0$ la parábola da 2 y la recta 0.

Paso 3. Se plantea arriba menos abajo y se simplifica.

$$A = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx$$

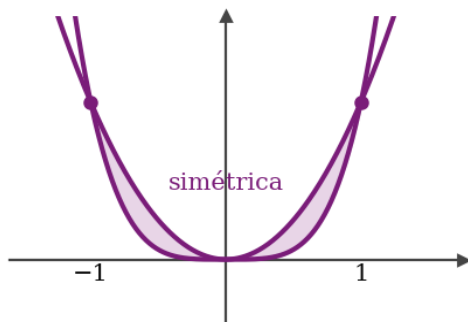
Paso 4. Se antideriva.

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2$$

Paso 5. Se evalúa en cada límite y se resta.

$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$$

2) $y = x^2$; $y = x^4$



Paso 1. Intersecciones: $x^2 = x^4$.

$$x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1$$

Paso 2. En $x = 1/2$: $x^2 = 1/4$ y $x^4 = 1/16$, así que x^2 está arriba.

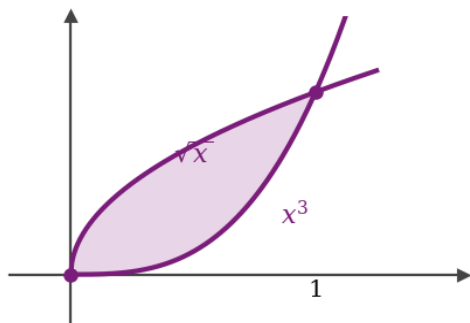
Paso 3. La región es simétrica respecto al eje y: se calcula $[0, 1]$ y se duplica.

$$A = 2 \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa.

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}$$

3) $y = \sqrt{x}$; $y = x^3$



Paso 1. Intersecciones: $\sqrt{x} = x^3$. Se elevan ambos lados al cuadrado.

$$x = x^6 \Rightarrow x(x^5 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$$

Paso 2. En $x = 1/2$: $\sqrt{0.5} \approx 0.71$ contra 0.125 , así que $\sqrt{x}$ está arriba.

$$A = \int_0^1 (x^{1/2} - x^3) dx$$

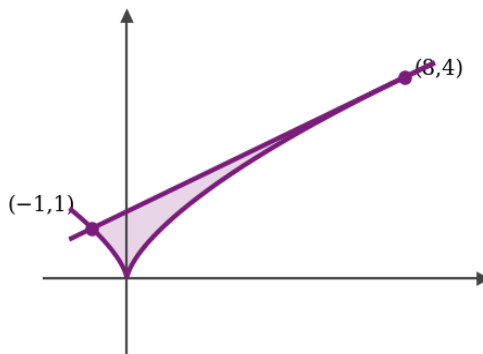
Paso 3. Se antideriva.

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

Paso 4. Se evalúa en 1 (en 0 todo se anula).

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ = \frac{5}{12}$$

4) $y^3 = x^2$; $x - 3y + 4 = 0$



Paso 1. De la recta se despeja $x = 3y - 4$ y se sustituye en $y^3 = x^2$.

$$y^3 = (3y - 4)^2 = 9y^2 - 24y + 16$$

Paso 2. Se pasa todo a un lado y se factoriza.

$$y^3 - 9y^2 + 24y - 16 = (y - 1)(y - 4)^2 = 0$$

Los cortes son $y = 1$ y $y = 4$, es decir los puntos $(-1, 1)$ y $(8, 4)$.

Paso 3. Se integra en x , de -1 a 8 ; la recta $y = (x + 4)/3$ va por arriba de $y = x^{2/3}$.

$$A = \int_{-1}^8 \left(\frac{x + 4}{3} - x^{2/3} \right) dx$$

Paso 4. Se antideriva.

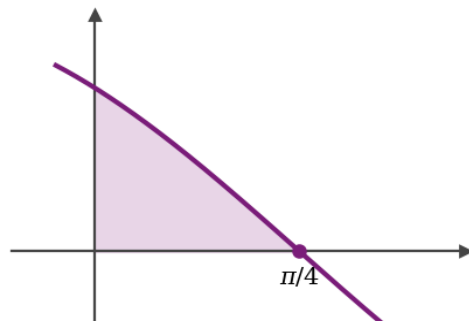
$$= \left[\frac{x^2}{6} + \frac{4x}{3} - \frac{3}{5} x^{5/3} \right]_{-1}^8$$

Paso 5. Se evalúa (en $x = -1$ se usa $(-1)^{5/3} = -1$).

$$= \frac{32}{15} + \frac{17}{30}$$

$$= \frac{27}{10}$$

5) $y = \cos x - \sin x$; $x = 0$; $y = 0$



Paso 1. La curva corta el eje x donde $\cos x = \sin x$, es decir en $x = \pi/4$.

Paso 2. La región va de $x = 0$ a $x = \pi/4$ y la curva está sobre el eje, así que se integra directamente.

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx$$

Paso 3. Se antideriva: la de $\cos$ es $\sin$, y la de $-\sin$ es $+\cos$.

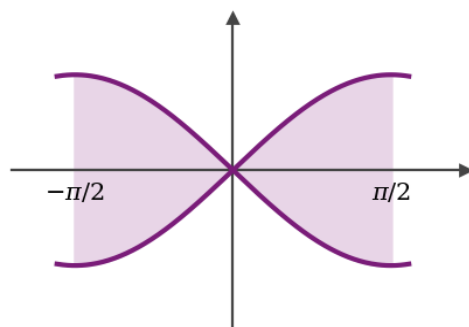
$$= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4}$$

Paso 4. En $\pi/4$ ambos valen $\sqrt{2}/2$; en 0 valen 0 y 1.

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0 + 1)$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

6) $y = \sin x$; $y = -\sin x$; $x = -\pi/2$; $x = \pi/2$



Paso 1. La distancia vertical entre las curvas es $\sin x - (-\sin x) = 2 \sin x$.

Paso 2. En $[-\pi/2, 0]$ esa diferencia es negativa, así que conviene usar la simetría: se calcula $[0, \pi/2]$ y se duplica.

$$A = 2 \int_0^{\pi/2} 2 \sin x dx$$

Paso 3. Se antideriva.

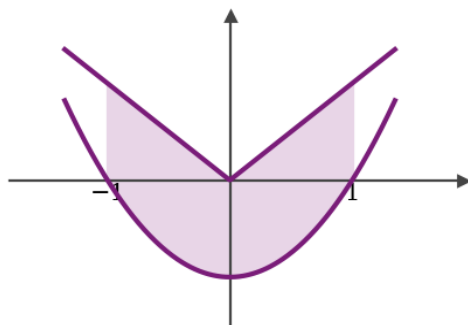
$$= 4 [-\cos x]_0^{\pi/2}$$

Paso 4. Se evalúa: $\cos(\pi/2) = 0$ y $\cos 0 = 1$.

$$= 4(0 + 1)$$

$$= 4$$

7) $y = |x|$; $y = x^2 - 1$; $x = -1$; $x = 1$



Paso 1. Se comprueba cuál está arriba: en $x = 0$, $|x| = 0$ y $x^2 - 1 = -1$, así que $|x|$ va por encima en todo el intervalo.

Paso 2. La región es simétrica respecto al eje y : se calcula $[0, 1]$ y se duplica. Ahí $|x| = x$.

$$A = 2 \int_0^1 (x - x^2 + 1) dx$$

Paso 3. Se antideriva.

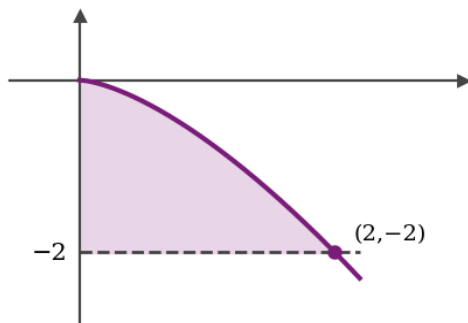
$$= 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1$$

Paso 4. Se evalúa.

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) = 2 \cdot \frac{7}{6}$$

$$= \frac{7}{3}$$

8) $x^3 = 2y^2$; $x = 0$; $y = -2$ (cuarto cuadrante)



Paso 1. La región está en el cuarto cuadrante, limitada por el eje y ($x = 0$) y la recta $y = -2$.

Paso 2. Como las fronteras son $x = 0$ y la curva, conviene integrar respecto a y : se despeja x .

$$x^3 = 2y^2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2y^2} = \sqrt[3]{2} y^{2/3}$$

Paso 3. Se integra de $y = -2$ a $y = 0$.

$$A = \sqrt[3]{2} \int_{-2}^0 y^{2/3} dy$$

Paso 4. Como $y^{(2/3)}$ es par, equivale a integrar de 0 a 2. La antiderivada es $(3/5)y^{(5/3)}$.

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 2^{5/3} = \frac{3}{5} \sqrt[3]{64}$$

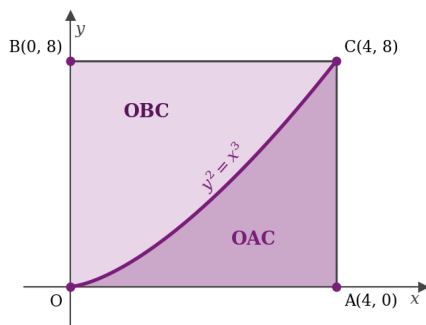
Paso 5. La raíz cúbica de 64 es 4.

$$= \frac{3}{5} (4)$$

$$= \frac{12}{5}$$

Solucionario — Tarea 2.7 (método del disco)

1) OAC alrededor del eje x.



región plana



sólido generado

Paso 1. OAC está bajo la curva y toca el eje x, que es el eje de giro: el elemento vertical genera un disco macizo.

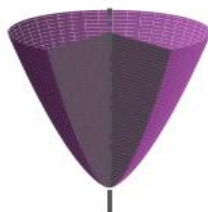
Paso 2. El radio es la altura de la curva; de $y^2 = x^3$ se despeja $y = x^{3/2}$. Los límites son $x = 0$ y $x = 4$.

$$V = \pi \int_0^4 (x^{3/2})^2 dx = \pi \int_0^4 x^3 dx$$

Paso 3. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \pi \cdot \frac{256}{4} \\ &= 64\pi \end{aligned}$$

2) OBC alrededor del eje y.



Paso 1. OBC toca el eje y, que es el eje de giro: elemento horizontal, disco macizo.

Paso 2. Se despeja x en función de y: de $y^2 = x^3$ resulta $x = y^{2/3}$. Los límites son $y = 0$ y $y = 8$.

$$V = \pi \int_0^8 (y^{2/3})^2 dy = \pi \int_0^8 y^{4/3} dy$$

Paso 3. Se antideriva.

$$= \pi \left[\frac{3}{7} y^{7/3} \right]_0^8$$

Paso 4. Se evalúa usando $8^{(7/3)} = 2^7 = 128$.

$$\begin{aligned} &= \pi \cdot \frac{3}{7} (128) \\ &= \frac{384}{7} \pi \end{aligned}$$

3) OBC alrededor de la recta $y = 8$.



Paso 1. La recta $y = 8$ es la frontera superior de OBC, así que la región la toca: disco.

Paso 2. El radio es la distancia de la recta a la curva, medida verticalmente.

$$r = 8 - x^{3/2}$$

Paso 3. Se plantea la integral con x de 0 a 4 y se desarrolla el cuadrado.

$$V = \pi \int_0^4 (64 - 16x^{3/2} + x^3) dx$$

Paso 4. Se antideriva término a término.

$$= \pi \left[64x - \frac{32}{5}x^{5/2} + \frac{x^4}{4} \right]_0^4$$

Paso 5. Se evalúa en 4 ($4^{(5/2)} = 32$).

$$= \pi \left(256 - \frac{1024}{5} + 64 \right)$$

$$= \frac{576}{5} \pi$$

4) OAC alrededor de la recta $x = 4$.



Paso 1. La recta $x = 4$ es la frontera derecha de OAC: la región la toca, así que es un disco con elementos horizontales.

Paso 2. El radio es la distancia horizontal de la recta a la curva.

$$r = 4 - x = 4 - y^{2/3}$$

Paso 3. Se desarrolla el cuadrado e integra en y de 0 a 8.

$$V = \pi \int_0^8 (16 - 8y^{2/3} + y^{4/3}) dy$$

Paso 4. Se antideriva.

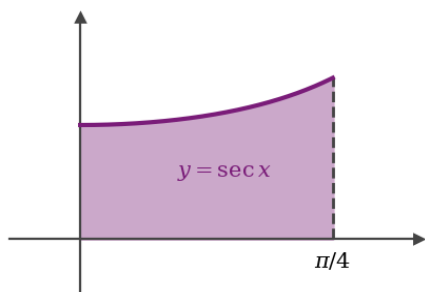
$$= \pi \left[16y - \frac{24}{5}y^{5/3} + \frac{3}{7}y^{7/3} \right]_0^8$$

Paso 5. Se evalúa con $8^{(5/3)} = 32$ y $8^{(7/3)} = 128$.

$$= \pi \left(128 - \frac{768}{5} + \frac{384}{7} \right)$$

$$= \frac{1024}{35} \pi$$

- 5) $y = \sec x$, eje x , eje y , $x = \pi/4$; alrededor del eje x .



región plana



sólido generado

Paso 1. La región toca el eje x , que es el eje de giro: disco de radio $\sec x$.

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$$

Paso 2. Aquí el cuadrado del radio es justamente $\sec^2 x$, cuya antiderivada es $\tan x$.

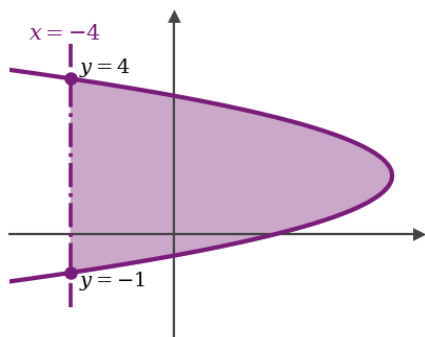
$$= \pi [\tan x]_0^{\pi/4}$$

Paso 3. Se evalúa: $\tan(\pi/4) = 1$.

$$= \pi(1 - 0)$$

$$= \pi$$

- 6) $x = -4$ y $x = 4 + 6y - 2y^2$; alrededor de $x = -4$.



región plana



sólido generado

Paso 1. Se hallan los límites igualando la parábola con la recta $x = -4$.

$$4 + 6y - 2y^2 = -4 \Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow (y - 4)(y + 1) = 0$$

Los límites son $y = -1$ y $y = 4$.

Paso 2. La recta $x = -4$ es frontera de la región, así que la toca: disco con elementos horizontales.

Paso 3. El radio es la distancia horizontal desde el eje de giro hasta la parábola.

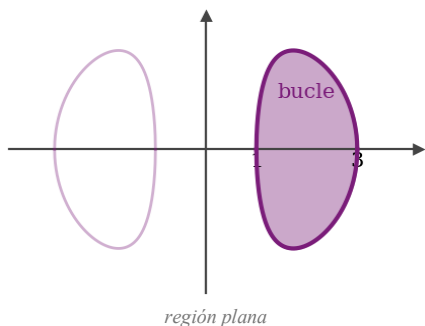
$$r = (4 + 6y - 2y^2) - (-4) = 8 + 6y - 2y^2$$

$$V = \pi \int_{-1}^4 (8 + 6y - 2y^2)^2 \, dy$$

Paso 4. Se desarrolla el cuadrado, se antideriva y se evalúa entre -1 y 4 .

$$= \frac{1250}{3} \pi$$

- 7) Bucle de $x^2y^2 = (x^2 - 9)(1 - x^2)$; alrededor del eje x .



sólido generado

Paso 1. Se despeja y^2 de la ecuación de la curva.

$$y^2 = \frac{(x^2 - 9)(1 - x^2)}{x^2}$$

Paso 2. y^2 solo es ≥ 0 si ambos factores tienen el mismo signo; eso ocurre para $1 \leq |x| \leq 3$. Se toma el bucle $x \in [1, 3]$.

Paso 3. Como el sólido se genera girando sobre el eje x , el radio es y y basta con y^2 .

$$V = \pi \int_1^3 y^2 dx$$

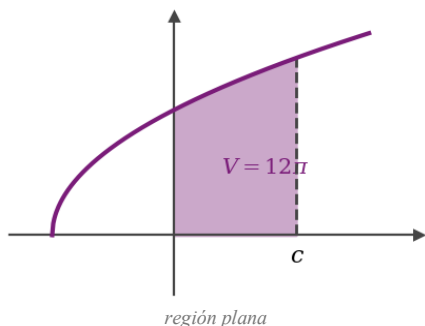
Paso 4. Se desarrolla el integrando dividiendo entre x^2 .

$$V = \pi \int_1^3 (-x^2 + 10 - 9x^{-2}) dx$$

Paso 5. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= \pi \left[-\frac{x^3}{3} + 10x + \frac{9}{x} \right]_1^3 = \pi \left(24 - \frac{56}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} \pi \end{aligned}$$

8) $y = \sqrt{2x+4}$, ejes, $x = c$; hallar c tal que $V = 12\pi$.



sólido generado

Paso 1. La región toca el eje x : disco de radio $\sqrt{2x+4}$, con x de 0 a c .

Paso 2. Al elevar el radio al cuadrado desaparece la raíz.

$$V = \pi \int_0^c (2x + 4) dx$$

Paso 3. Se antideriva y se evalúa: queda el volumen en función de c .

$$V = \pi [x^2 + 4x]_0^c = \pi(c^2 + 4c)$$

Paso 4. Se iguala al volumen pedido y se cancela π .

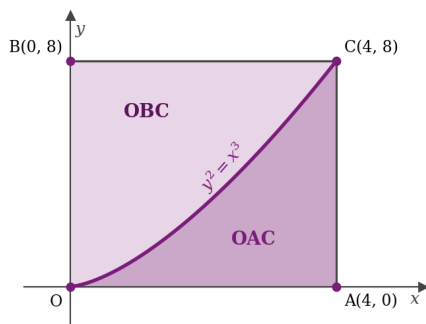
$$c^2 + 4c - 12 = 0 \Rightarrow (c + 6)(c - 2) = 0$$

Paso 5. Se descarta la raíz negativa porque el enunciado pide $c > 0$.

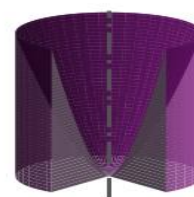
$$= c = 2$$

Solucionario — Tarea 2.8 (método del anillo)

1) OAC alrededor del eje y.



región plana



sólido generado

Paso 1. Al girar OAC alrededor del eje y queda un hueco en el centro: la rebanada es un anillo, con elementos horizontales.

Paso 2. Se miden los radios desde el eje y: la frontera lejana es la recta $x = 4$ y la cercana es la curva.

$$R = 4, \quad r = y^{2/3}$$

Paso 3. Se aplica $V = \pi \int (R^2 - r^2) dy$, con y de 0 a 8.

$$V = \pi \int_0^8 (16 - y^{4/3}) dy$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa ($8^{7/3} = 128$).

$$\begin{aligned} &= \pi \left[16y - \frac{3}{7} y^{7/3} \right]_0^8 = \pi \left(128 - \frac{384}{7} \right) \\ &= \frac{512}{7} \pi \end{aligned}$$

2) OAC alrededor de la recta $y = 8$.



Paso 1. OAC queda lejos de la recta $y = 8$, así que la rebanada es un anillo con elementos verticales.

Paso 2. Se miden los radios desde $y = 8$: la frontera lejana es el eje x y la cercana es la curva.

$$R = 8, \quad r = 8 - x^{3/2}$$

Paso 3. Se plantea la diferencia de cuadrados y se simplifica.

$$64 - (64 - 16x^{3/2} + x^3) = 16x^{3/2} - x^3$$

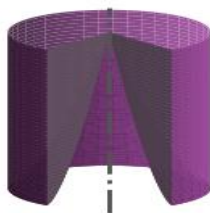
$$V = \pi \int_0^4 (16x^{3/2} - x^3) dx$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa ($4^{5/2} = 32$).

$$= \pi \left[\frac{32}{5} x^{5/2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{1024}{5} - 64 \right)$$

$$= \frac{704}{5} \pi$$

3) OBC alrededor de la recta $x = 4$.



Paso 1. OBC solo toca la recta $x = 4$ en el punto C, así que al girar queda hueco: anillo con elementos horizontales.

Paso 2. Se miden los radios desde $x = 4$: la frontera lejana es el eje y y la cercana es la curva.

$$R = 4, \quad r = 4 - y^{2/3}$$

Paso 3. Se desarrolla la diferencia de cuadrados.

$$16 - (16 - 8y^{2/3} + y^{4/3}) = 8y^{2/3} - y^{4/3}$$

$$V = \pi \int_0^8 (8y^{2/3} - y^{4/3}) dy$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa ($8^{(5/3)} = 32$).

$$= \pi \left(\frac{768}{5} - \frac{384}{7} \right)$$

$$= \frac{3456}{35} \pi$$

4) OBC alrededor del eje x.



Paso 1. OBC está por encima de la curva, así que no toca el eje x: anillo con elementos verticales.

Paso 2. Se miden los radios desde el eje x: la frontera lejana es la recta $y = 8$ y la cercana es la curva.

$$R = 8, \quad r = x^{3/2}$$

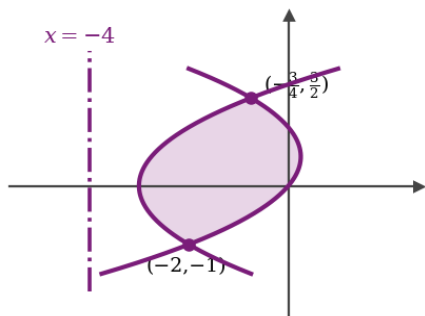
$$V = \pi \int_0^4 (64 - x^3) dx$$

Paso 3. Se antideriva y se evalúa.

$$= \pi \left[64x - \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \pi(256 - 64)$$

$$= 192 \pi$$

- 5) $x = y - y^2$ y $x = y^2 - 3$; alrededor de $x = -4$.



región plana



sólido generado

Paso 1. Intersecciones: se igualan las dos parábolas.

$$y - y^2 = y^2 - 3 \Rightarrow 2y^2 - y - 3 = 0 \Rightarrow (2y - 3)(y + 1) = 0$$

Los límites son $y = -1$ y $y = 3/2$.

Paso 2. Los radios se miden desde $x = -4$, no desde el eje y : se le suma 4 a cada frontera.

$$R = (y - y^2) + 4, \quad r = (y^2 - 3) + 4 = y^2 + 1$$

Paso 3. Se desarrolla $R^2 - r^2$ y se simplifica.

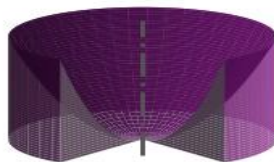
$$(4 + y - y^2)^2 - (1 + y^2)^2 = -2y^3 - 9y^2 + 8y + 15$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa entre -1 y $3/2$.

$$= \pi \left[-\frac{y^4}{2} - 3y^3 + 4y^2 + 15y \right]_{-1}^{3/2}$$

$$= \frac{875}{32} \pi$$

- 6) $y = x^2$, eje x , $x = 1$; alrededor del eje y (elementos horizontales).



Paso 1. Con elementos horizontales la rebanada es un anillo centrado en el eje y .

Paso 2. Se despeja x en la curva: $x = \sqrt{y}$. Los radios son la recta $x = 1$ (lejana) y la curva (cercana).

$$R = 1, \quad r = \sqrt{y}$$

Paso 3. Al elevar al cuadrado, $(\sqrt{y})^2 = y$. Los límites son $y = 0$ y $y = 1$.

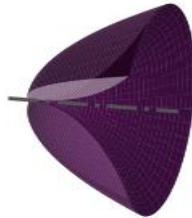
$$V = \pi \int_0^1 (1 - y) dy$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa.

$$= \pi \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

7) $y = x^2$ y $y^2 = x$; alrededor del eje x (elementos perpendiculares).



Paso 1. Intersecciones: $x^2 = \sqrt{x}$, de donde $x^4 = x$.

$$x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$$

Paso 2. Elementos perpendiculares al eje x son verticales, así que la rebanada es un anillo.

Paso 3. Se miden los radios desde el eje x : la curva $y = \sqrt{x}$ está más lejos que $y = x^2$.

$$R = \sqrt{x}, \quad r = x^2$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa.

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{3}{10} \pi$$

8) $y = \sqrt{x}$, eje y , $y = 1$; alrededor de $y = 2$ (elementos perpendiculares).



Paso 1. Elementos perpendiculares al eje horizontal $y = 2$ son verticales; x va de 0 a 1.

Paso 2. Se miden los radios desde $y = 2$. La frontera lejana es la curva $y = \sqrt{x}$, la cercana es la recta $y = 1$.

$$R = 2 - \sqrt{x}, \quad r = 2 - 1 = 1$$

Paso 3. Se desarrolla $R^2 - r^2$.

$$(4 - 4\sqrt{x} + x) - 1 = 3 - 4x^{1/2} + x$$

$$V = \pi \int_0^1 (3 - 4x^{1/2} + x) dx$$

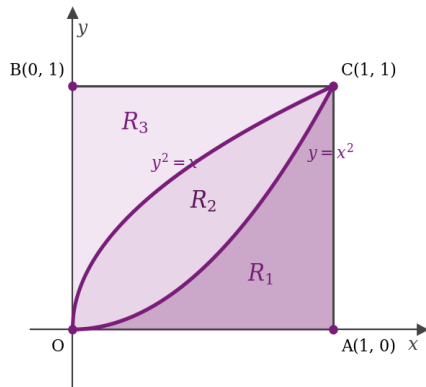
Paso 4. Se antideriva y se evalúa.

$$= \pi \left[3x - \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left(3 - \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

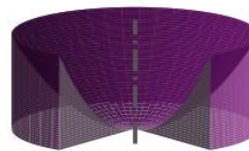
$$= \frac{5}{6} \pi$$

Solucionario — Tarea 2.9 (capas cilíndricas)

1) R_1 alrededor del eje y .



región plana



sólido generado

Paso 1. R_1 está bajo $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 1$. El elemento vertical queda paralelo al eje y : capas.

Paso 2. Se identifican las tres cantidades de la capa.

$$\text{radio} = x, \quad \text{altura} = x^2, \quad \text{espesor} = dx$$

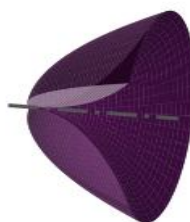
Paso 3. Se sustituye en $V = 2\pi(\text{radio})(\text{altura}) dx$.

$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2) R_2 alrededor del eje x .



Paso 1. El eje de giro es el eje x , así que los elementos paralelos a él son horizontales: capas.

Paso 2. El radio es y y la altura es la diferencia horizontal (derecha menos izquierda).

$$\text{radio} = y, \quad \text{altura} = \sqrt{y} - y^2$$

$$V = 2\pi \int_0^1 y(\sqrt{y} - y^2) dy = 2\pi \int_0^1 (y^{3/2} - y^3) dy$$

Paso 3. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= 2\pi \left[\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{3}{10} \pi \end{aligned}$$

3) R_3 alrededor de la recta $y = 2$.



Paso 1. El eje $y = 2$ es horizontal, así que los elementos paralelos son horizontales: capas.

Paso 2. El radio es la distancia a la recta y la altura es el ancho de R_3 (de la curva al eje y).

$$\text{radio} = 2 - y, \quad \text{altura} = x = y^2$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (2 - y)y^2 dy = 2\pi \int_0^1 (2y^2 - y^3) dy$$

Paso 3. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= 2\pi \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{5}{6} \pi \end{aligned}$$

4) R_2 alrededor de la recta $x = -2$.



Paso 1. El eje $x = -2$ es vertical, así que los elementos paralelos son verticales: capas.

Paso 2. El radio es la distancia horizontal al eje de giro (no la coordenada x).

$$\text{radio} = x - (-2) = x + 2, \quad \text{altura} = \sqrt{x} - x^2$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x + 2)(x^{1/2} - x^2) dx$$

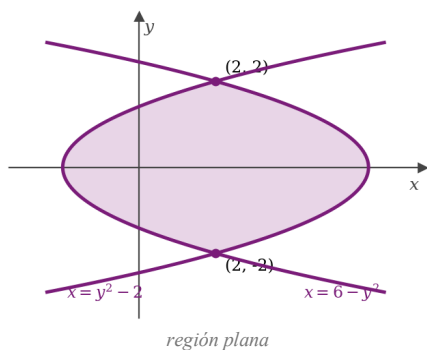
Paso 3. Se distribuye el producto antes de integrar.

$$x^{3/2} + 2x^{1/2} - x^3 - 2x^2$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa en 1.

$$\begin{aligned} &= 2\pi \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{49}{60} \\ &= \frac{49}{30} \pi \end{aligned}$$

5) $x = y^2 - 2$ y $x = 6 - y^2$; alrededor del eje x .



Paso 1. Intersecciones: se igualan las dos parábolas.

$$y^2 - 2 = 6 - y^2 \Rightarrow 2y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2$$

Paso 2. El eje de giro es el eje x : los elementos paralelos son horizontales, de radio y .

$$\text{altura} = (6 - y^2) - (y^2 - 2) = 8 - 2y^2$$

Paso 3. La región es simétrica respecto al eje x , y ambas mitades barren el mismo sólido: basta con la mitad superior, de $y = 0$ a $y = 2$.

$$V = 2\pi \int_0^2 y(8 - 2y^2) dy = 2\pi \int_0^2 (8y - 2y^3) dy$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= 2\pi \left[4y^2 - \frac{y^4}{2} \right]_0^2 = 2\pi(16 - 8) \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

6) Las mismas curvas; alrededor del eje y .



Paso 1. El eje de giro es el eje y ; con elementos horizontales la rebanada es un anillo.

Paso 2. Se miden los radios desde el eje y .

$$R = 6 - y^2, \quad r = y^2 - 2$$

Paso 3. Se desarrolla $R^2 - r^2$; los términos en y^4 se cancelan.

$$(36 - 12y^2 + y^4) - (y^4 - 4y^2 + 4) = 32 - 8y^2$$

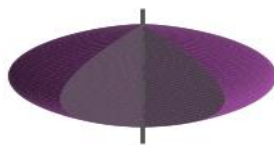
Paso 4. Aquí sí conviene duplicar la mitad superior, porque cada mitad genera una parte distinta del sólido.

$$V = 2 \cdot \pi \int_0^2 (32 - 8y^2) dy$$

Paso 5. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= 2\pi \left[32y - \frac{8}{3}y^3 \right]_0^2 = 2\pi \left(64 - \frac{64}{3} \right) \\ &= \frac{256}{3} \pi \end{aligned}$$

7) Las mismas curvas; alrededor de la recta $x = 2$.



Paso 1. La recta $x = 2$ pasa por la región. Se comprueba que está a la misma distancia de ambas fronteras:

$$2 - (y^2 - 2) = 4 - y^2 \quad y \quad (6 - y^2) - 2 = 4 - y^2$$

Paso 2. Al coincidir, la región es simétrica respecto a $x = 2$ y la rebanada horizontal es un disco macizo.

$$\text{radio} = 4 - y^2, \quad y \in [-2, 2]$$

Paso 3. Se desarrolla el cuadrado.

$$V = \pi \int_{-2}^2 (16 - 8y^2 + y^4) dy$$

Paso 4. Se antideriva y se evalúa.

$$\begin{aligned} &= \pi \left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{512}{15} \pi \end{aligned}$$

8) Las mismas curvas; alrededor de la recta $y = 2$.



Paso 1. El eje $y = 2$ es horizontal: los elementos paralelos son horizontales, así que se usan capas.

Paso 2. El radio es la distancia a la recta y la altura es el ancho de la región.

$$\text{radio} = 2 - y, \quad \text{altura} = 8 - 2y^2$$

Paso 3. Aquí no se puede usar simetría porque el eje no pasa por el centro: se integra de -2 a 2 .

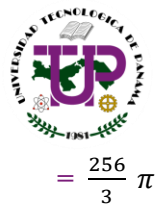
$$V = 2\pi \int_{-2}^2 (2 - y)(8 - 2y^2) dy$$

Paso 4. Se distribuye: los términos impares ($-8y$ y $2y^3$) se anulan al integrar en un intervalo simétrico.

$$\int_{-2}^2 (16 - 4y^2) dy = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$$

Paso 5. Se multiplica por 2π .

$$= 2\pi \cdot \frac{128}{3}$$



UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA
DE PANAMÁ