



MÓDULO III

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Unidad I — Teoría, formulario y ejercicios resueltos paso a paso

Cómo usar este material. Cada técnica presenta la teoría con su explicación, problemas ejemplo resueltos y una tarea con solo los enunciados. Las soluciones detalladas están en el **Solucionario** al final; el **Formulario** resume en una hoja todas las fórmulas e identidades del módulo.

Panorama. Las cinco técnicas de este módulo responden a una misma pregunta: *¿cómo transformar una integral que no es inmediata en una que sí lo sea?* Por partes deshace un producto; las potencias trigonométricas se reducen con identidades; la sustitución trigonométrica elimina radicales; y las fracciones parciales descomponen un cociente de polinomios en sumandos simples.

Unidad I — Técnicas de integración

3.1 Integración por partes

Es la regla del producto de la derivación leída al revés. Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son diferenciables, derivar el producto da $(uv)' = u'v + uv'$; al integrar ambos lados y despejar se obtiene:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

La integral original $\int u \, dv$ se cambia por otra, $\int v \, du$, con la esperanza de que sea más sencilla. Para aplicarla se parte el integrando en dos: la parte que se llamará u (y se derivará) y la que se llamará dv (y se integrará).

Método ILATE. La elección de u no es arbitraria. La palabra ILATE ordena por prioridad los tipos de función: se escoge como u la que aparezca primero en la lista, y el resto del integrando es dv .

I	Inversas	$\arcsen x, \arctan x$
L	Logarítmicas	$\ln x, \log x$
A	Algebraicas	$x^n, \sqrt{x}$
T	Trigonométricas	$\sen x, \cos x$
E	Exponenciales	e^x, a^x

prioridad
para elegir u

Figura 1. Orden de prioridad para elegir u . Lo que quede del integrando (incluido dx) es dv .

La lógica es doble: las inversas y logarítmicas se **simplifican al derivar** (y son difíciles de integrar), mientras que las exponenciales y trigonométricas se integran con facilidad y no se complican. Por eso las primeras se eligen como u y las últimas como dv .

Consejo: si al aplicar la fórmula la nueva integral resulta más complicada que la original, casi siempre significa que u y dv se eligieron al revés.

Método tabular (para funciones cíclicas)

Cuando u es un polinomio de grado n , hay que aplicar la fórmula n veces. El método tabular abrevia ese trabajo: se hace una columna derivando u hasta llegar a cero y otra integrando dv repetidamente; después se multiplican en diagonal alternando los signos $+$ y $-$.

derivar u		integrar dv
x^3	$\oplus$	e^{-2x}
$3x^2$	$\ominus$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$
$6x$	$\oplus$	$\frac{1}{4}e^{-2x}$
6	$\ominus$	$-\frac{1}{8}e^{-2x}$
0	$\ominus$	$\frac{1}{16}e^{-2x}$

se multiplica en diagonal alternando signos

Figura 2. Método tabular aplicado a $\int x^3 e^{-2x} dx$. Se deriva hasta llegar a 0 y se multiplica en diagonal.

$$\int x^3 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x^3 e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{-2x} - \frac{3}{4}x e^{-2x} - \frac{3}{8}e^{-2x} + C$$

Cuándo termina la tabla: cuando la columna de la izquierda llega a cero, es decir cuando u es un polinomio. Si ninguna de las dos columnas se agota —el caso cíclico— la tabla también sirve, pero se detiene en cuanto reaparece el integrando original, como se ve enseguida.

Método tabular en el caso cíclico

Cuando ni u ni dv se agotan al derivar o integrar —como ocurre con una exponencial multiplicada por un seno— la tabla nunca llega a cero. Aun así puede usarse: se corta en el renglón donde vuelve a aparecer la integral de partida y se resuelve una **ecuación algebraica**.

► $\int e^x \sen x dx$

Paso 1. Se elige u y dv . Por ILATE la trigonométrica va antes que la exponencial, así que $u = \sen x$.

$$u = \sen x, \quad dv = e^x dx$$

Paso 2. Se arma la tabla. Derivando el seno se vuelve a él en dos pasos, y la exponencial no cambia al integrarse: la tabla es cíclica.

derivar u		integrar dv
$\sen x$	$\oplus$	e^x
$\cos x$	$\ominus$	e^x
$-\sen x$	$\oplus$	e^x

la última fila no se multiplica: se integra y reaparece la integral original

Paso 3. Los dos primeros productos en diagonal se toman con signos $+$ y $-$, igual que en el caso normal.

$$e^x \sen x - e^x \cos x$$

Paso 4. La última fila no se multiplica: se integra, con el signo que le toca ($+$).

$$+ \int (-\sen x)e^x dx = - \int e^x \sen x dx$$

Paso 5. Ahí está la clave: reapareció la integral original. Se le llama I y se escribe la igualdad completa.



$$I = e^x \sen x - e^x \cos x - I$$

Paso 6. Ya no es un problema de cálculo sino de álgebra: se pasa $-I$ al otro lado.

$$2I = e^x(\sen x - \cos x)$$

Paso 7. Se despeja I y se agrega la constante.

$$= \frac{e^x}{2} (\sen x - \cos x) + C$$

Comprobación: al derivar el resultado con la regla del producto los términos en $\cos x$ se cancelan y queda exactamente $e^x \sen x$.

Cuidado con la consistencia: también funciona empezando con $u = e^x$ y $dv = \sen x \, dx$, y el resultado es el mismo. Lo que no se puede hacer es cambiar el criterio a mitad del proceso: si en la segunda vuelta se intercambian los papeles de u y dv , todo se cancela y se llega a la identidad trivial $0 = 0$, sin haber resuelto nada.

Problemas ejemplo

► $\int x e^{3x} \, dx$

Paso 1. Según ILATE, entre algebraica (x) y exponencial ($e^{(3x)}$) tiene prioridad la algebraica: esa es u .

$$u = x, \quad dv = e^{3x} \, dx$$

Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

$$\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \, dx$$

Paso 4. La nueva integral ya es inmediata.

$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

► $\int \ln 5x \, dx$

Paso 1. No hay producto visible, pero ILATE indica que el logaritmo es u ; entonces $dv = dx$.

$$u = \ln 5x, \quad dv = dx$$

Paso 2. Se deriva y se integra. Nota: la derivada de $\ln 5x$ es $1/x$ (la constante 5 se cancela).

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

Paso 3. Se aplica la fórmula.

$$x \ln 5x - \int x \cdot \frac{dx}{x}$$

Paso 4. La integral restante se simplifica a $\int dx$.

$$= x \ln 5x - x + C$$

Tarea 3.1

Aplica ILATE para decidir quién es u ; en los que llevan un polinomio de grado ≥ 2 conviene el método tabular. En el 11 y el 13 hace falta una sustitución previa antes de integrar por partes.

- 1) $\int x e^{3x} \, dx$
- 2) $\int x \cos 2x \, dx$
- 3) $\int x \sec x \tan x \, dx$
- 4) $\int x 3^x \, dx$
- 5) $\int \ln 5x \, dx$
- 6) $\int \sen^{-1} w \, dw$



- 7) $\int \frac{(\ln t)^2}{t} dt$
- 8) $\int x \sec^2 x dx$
- 9) $\int x \tan^{-1} x dx$
- 10) $\int \ln(x^2 + 1) dx$
- 11) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$
- 12) $\int x^2 \sin 3x dx$
- 13) $\int \sin(\ln y) dy$
- 14) $\int \sin t \cdot \ln(\cos t) dt$

3.2 Integración de potencias de funciones trigonométricas

No existe una fórmula única: la estrategia depende de la **paridad de los exponentes**. La idea general es siempre la misma: apartar un factor que sirva como du y convertir el resto con una identidad pitagórica, de modo que la integral se reduzca a una sustitución.

Identidades que se usan:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x & 1 + \cot^2 x &= \csc^2 x \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

Caso 1. Potencia impar de seno o de coseno.

Se aparta un factor y se convierte el resto (que queda con exponente par) usando $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ o $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$\sin^n x dx = (\sin^{n-1} x)(\sin x dx) \quad \cos^n x dx = (\cos^{n-1} x)(\cos x dx)$$

Caso 2. Producto $\sin^n x \cdot \cos^m x$ con al menos un exponente impar.

Se aparta un factor de la función cuyo exponente es impar; ese factor será el diferencial de la sustitución.

$$n \text{ impar: } \sin^{n-1} x \cos^m x (\sin x dx) \Rightarrow u = \cos x$$

$$m \text{ impar: } \sin^n x \cos^{m-1} x (\cos x dx) \Rightarrow u = \sin x$$

Caso 3. Ambos exponentes pares (o una sola potencia par).

No hay factor que apartar. Se bajan los exponentes con las identidades de ángulo mitad, tantas veces como haga falta.

$$\begin{aligned} \sin^n x dx &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^{n/2} dx \\ \cos^n x dx &= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^{n/2} dx \end{aligned}$$

Caso 4. Potencias de tangente o cotangente.

Se apartan dos factores y se convierten con la identidad correspondiente; el proceso se repite hasta llegar a $\int \tan x dx$ o $\int \cot x dx$.

$$\begin{aligned} \tan^n x dx &= \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ \cot^n x dx &= \cot^{n-2} x (\csc^2 x - 1) dx \end{aligned}$$

Caso 5. Producto de tangente con secante (o cotangente con cosecante).

Hay dos caminos según qué exponente sea adecuado:

$$\text{sec par: } u = \tan x, \quad du = \sec^2 x \, dx \quad (\text{se aparta } \sec^2 x)$$

$$\text{tan impar: } u = \sec x, \quad du = \sec x \tan x \, dx \quad (\text{se aparta } \sec x \tan x)$$

Regla rápida: con secante se busca dejar un $\sec^2 x$ (si su potencia es par) o un $\sec x \tan x$ (si la potencia de la tangente es impar). Si ninguna de las dos condiciones se cumple, se convierte todo a senos y cosenos.

Caso 6. Productos de ángulos distintos: $\sin mx \cdot \cos nx$ y similares.

Se usan las identidades de producto a suma:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

Problemas ejemplo

► $\int \cos^5 x \, dx$

Paso 1. El exponente es impar (Caso 1): se aparta un $\cos x$ como diferencial.

$$\int \cos^4 x (\cos x \, dx)$$

Paso 2. El resto tiene exponente par y se convierte con $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$\int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx$$

Paso 3. Se desarrolla el cuadrado.

$$\int (1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x) \cos x \, dx$$

Paso 4. Con $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$, cada término es una potencia inmediata.

$$= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

► $\int \sin^4 x \, dx$

Paso 1. El exponente es par (Caso 3): no hay factor que apartar, se usa el ángulo mitad.

$$\sin^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x)$$

Paso 2. Aún queda un cuadrado: se vuelve a aplicar la identidad a $\cos^2 2x$.

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

Paso 3. Se reúne todo y se simplifica el integrando.

$$\frac{1}{8} \int (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) \, dx$$

Paso 4. Se integra término a término.

$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

Tarea 3.2

Antes de calcular, clasifica cada integral en uno de los seis casos: eso decide la estrategia. Del 15 al 17 son productos de ángulos distintos (Caso 6); del 18 al 22 hace falta una sustitución previa para llevarlos a alguno de los casos.

1) $\int \cos^5 x \, dx$

2) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

3) $\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx$

- 4) $\int \sec^4 x \, dx$
- 5) $\int \tan^6 3x \, dx$
- 6) $\int \sec^4 x \, dx$
- 7) $\int \cot^5 2x \, dx$
- 8) $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$
- 9) $\int \tan^5 2x \sec^4 2x \, dx$
- 10) $\int \sec^5 x \tan^4 x \, dx$
- 11) $\int \cot^3 x \csc^3 x \, dx$
- 12) $\int \cot^3 x \, dx$
- 13) $\int \sec^6 4x \tan 4x \, dx$
- 14) $\int \cot^2 3x \csc^4 3x \, dx$
- 15) $\int \cos 4x \cos 3x \, dx$
- 16) $\int \sin 3y \cos 5y \, dy$
- 17) $\int \sin 5\theta \sin \theta \, d\theta$
- 18) $\int e^x \tan^4(e^x) \, dx$
- 19) $\int \frac{\sec^4(\ln x)}{x} \, dx$
- 20) $\int (\tan 2x + \cot 2x)^2 \, dx$
- 21) $\int \frac{2 \sin w - 1}{\cos^2 w} \, dw$
- 22) $\int \frac{\tan^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
- 23) $\int \frac{\tan^4 y}{\sec^5 y} \, dy$

3.3 Integración por sustitución trigonométrica

Sirve para integrales que contienen un radical de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ o $\sqrt{u^2 - a^2}$ y que no se resuelven con una sustitución simple. La idea es reemplazar u por una función trigonométrica elegida de modo que la identidad pitagórica elimine la raíz.

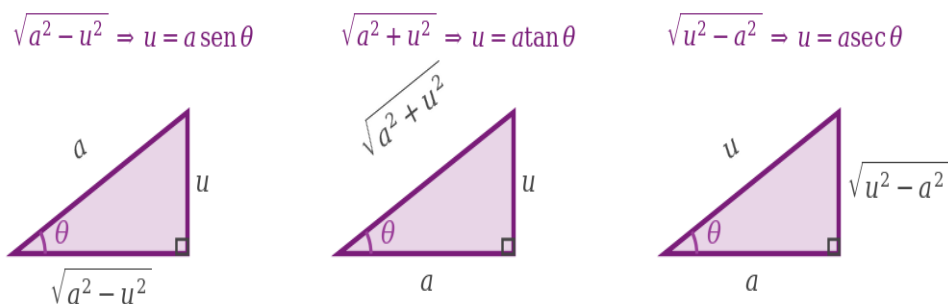


Figura 3. Las tres sustituciones y sus triángulos de referencia. El triángulo permite regresar de θ a la variable original.

Las tres formas:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - u^2} &\Rightarrow u = a \sin \theta \Rightarrow \sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta \\ \sqrt{a^2 + u^2} &\Rightarrow u = a \tan \theta \Rightarrow \sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta \end{aligned}$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} \Rightarrow u = a \sec \theta \Rightarrow \sqrt{u^2 - a^2} = a \tan \theta$$

En el primer caso, por ejemplo, al sustituir queda $\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = a \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = a \cos \theta$: la raíz desaparece. Los rangos de θ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ para el seno, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ para la tangente) garantizan que la raíz sea positiva.

Procedimiento. (1) Identificar a y u comparando con las tres formas; (2) escribir la sustitución y calcular du ; (3) reemplazar todo, incluida la raíz; (4) resolver la integral trigonométrica resultante; (5) **regresar a la variable original** con el triángulo de referencia.

El triángulo: se construye colocando θ , el cateto y la hipotenusa que dicta la sustitución; los demás lados salen del teorema de Pitágoras. De ahí se leen todas las razones trigonométricas necesarias en el último paso.

Antes de sustituir: si el radicando es un trinomio como $\sqrt{x^2 + 6x + 5}$, primero se completan cuadrados para llevarlo a una de las tres formas.

Problema ejemplo

► $\int \frac{4}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx$

Paso 1. Se identifica la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$ y se leen a y u .

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, \quad u^2 = x^2 \Rightarrow u = x$$

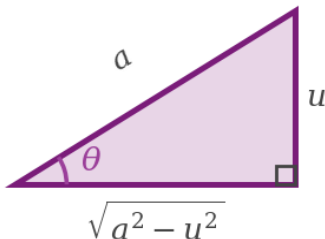
Paso 2. Se escribe la sustitución del seno y su diferencial.

$$x = 4 \sin \theta, \quad dx = 4 \cos \theta d\theta, \quad x^2 = 16 \sin^2 \theta$$

Paso 3. La raíz desaparece por la identidad pitagórica.

$$\sqrt{16 - x^2} = 4 \cos \theta$$

$$u = a \sin \theta$$



Paso 4. Se reemplaza todo y se simplifica.

$$4 \int \frac{4 \cos \theta d\theta}{(16 \sin^2 \theta)(4 \cos \theta)} = \frac{1}{4} \int \csc^2 \theta d\theta$$

Paso 5. Se integra en θ .

$$\frac{1}{4} (-\cot \theta)$$

Paso 6. Del triángulo, $\cot \theta = \sqrt{16 - x^2}/x$.

$$= -\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4x} + C$$

Tarea 3.3

Identifica primero cuál de las tres formas aparece y dibuja el triángulo antes de empezar: te servirá al final. En el 5 hay que integrar por partes antes de llegar a la sustitución trigonométrica.

1) $\int \frac{4}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx$



- 2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$
- 3) $\int \frac{9x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$
- 4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx$
- 5) $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x dx$

3.4 Fracciones parciales: denominador con factores lineales

Una función racional $N(x)/D(x)$ rara vez se integra directamente, pero puede **descomponerse en una suma de fracciones simples** que sí son inmediatas (logaritmos o potencias). Es el proceso inverso de sumar fracciones con común denominador.

Procedimiento general:

1. Si la fracción es *impropia* (grado del numerador $\geq$ grado del denominador), se hace primero la división:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = (\text{un polinomio}) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

2. Se factoriza el denominador por completo en factores de la forma $(px + q)^m$ y $(ax^2 + bx + c)^n$.
3. Para cada factor lineal $(px + q)^m$ se incluye la suma de m fracciones:

$$\frac{A_1}{px + q} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \dots + \frac{A_m}{(px + q)^m}$$

4. Se multiplica todo por el mínimo común denominador para obtener la **ecuación básica**, y se hallan las constantes.

Estrategia para hallar las constantes (factores lineales). Sustituir en la ecuación básica las **raíces** de cada factor lineal: cada raíz anula todos los términos menos uno, de modo que la constante se despeja de inmediato. Si hay factores repetidos, se usan los valores ya hallados y se sustituyen otros valores convenientes de x .

Resultado típico: cada fracción de la forma $A/(px+q)$ se integra como un logaritmo; las de denominador elevado, como una potencia negativa.

Problema ejemplo

► $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$

Paso 1. Se factoriza el denominador.

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Paso 2. Se plantea la descomposición con una constante por cada factor lineal.

$$\frac{1}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 3}$$

Paso 3. Se multiplica por el M.C.D. para obtener la ecuación básica.

$$1 = A(x - 3) + B(x + 3)$$

Paso 4. Se sustituyen las raíces: con $x = -3$ se anula B , y con $x = 3$ se anula A .

$$1 = A(-6) \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \quad 1 = B(6) \Rightarrow B = \frac{1}{6}$$

Paso 5. Se integran las dos fracciones simples.

$$-\frac{1}{6} \ln|x + 3| + \frac{1}{6} \ln|x - 3|$$

Paso 6. Se reúnen los logaritmos.

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

3.5 Fracciones parciales: denominador con factores cuadráticos

Cuando el denominador contiene un factor cuadrático **irreducible** (que no puede factorizarse en reales, es decir con discriminante negativo), el numerador correspondiente ya no es una constante sino un **binomio lineal**. Para cada factor $(ax^2 + bx + c)^n$ se incluye:

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Estrategia para hallar las constantes (factores cuadráticos). Aquí no basta sustituir raíces, porque el factor no las tiene en los reales. El procedimiento es:

1. Desarrollar la ecuación básica.
2. Agrupar los términos según las potencias de x .
3. Igualar los coeficientes de cada potencia en ambos lados, lo que produce un sistema de ecuaciones lineales en $A, B, C, \dots$
4. Resolver el sistema.

Cómo integrar cada pieza: la fracción $(Bx + C)/(ax^2 + bx + c)$ se separa en dos: la parte con Bx se resuelve por sustitución y da un logaritmo; la parte con C , tras completar cuadrados, da un arcotangente.

Método mixto: si el denominador tiene factores lineales y cuadráticos a la vez, conviene combinar: sustituir las raíces reales para las constantes de los factores lineales y luego igualar coeficientes para las restantes.

Problema ejemplo

► $\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} dx$

Paso 1. El factor $x^2 + 9$ es irreducible y está elevado al cuadrado: se necesitan dos numeradores lineales.

$$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2}$$

Paso 2. Se multiplica por $(x^2 + 9)^2$ y se desarrolla.

$$x^2 - x + 9 = (Ax + B)(x^2 + 9) + Cx + D$$

Paso 3. Se agrupan potencias e igualan coeficientes.

$$A = 0, \quad B = 1, \quad 9A + C = -1, \quad 9B + D = 9$$

Paso 4. Se resuelve el sistema.

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = 0$$

Paso 5. Se integran las dos piezas: la primera da arcotangente, la segunda una potencia.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9} - \int \frac{x dx}{(x^2 + 9)^2}$$

Paso 6. Resultado.

$$= \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + \frac{1}{2(x^2 + 9)} + C$$

Tarea 3.4 – 3.5



En los ejercicios 1 a 5 el denominador se factoriza en lineales: usa el método de sustituir raíces. En el 3 y el 6 aparecen factores cuadráticos irreducibles: ahí hay que igualar coeficientes. Recuerda factorizar por completo antes de plantear la descomposición. (En el 3 se corrigió el signo del término independiente respecto al documento original, que no era factorizable.)

- 1) $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$
- 2) $\int \frac{1}{4x^2 - 1} dx$
- 3) $\int \frac{4x^2}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$
- 4) $\int \frac{6x}{x^3 - 8} dx$
- 5) $\int \frac{x}{16x^4 - 1} dx$
- 6) $\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} dx$



FORMULARIO — Módulo III

Por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

ILATE: Inversas · Logarítmicas · Algebraicas · Trigonométricas · Exponenciales

u = la que aparezca primero; dv = el resto (con dx)

Polinomio $\times$ (e^x , $\sin$, $\cos$) $\rightarrow$ método tabular

Cíclicas ($e^x \sin x$): aplicar dos veces y despejar

Identidades básicas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Producto a suma

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

Potencias trigonométricas

$\sin/\cos$ con exponente impar $\rightarrow$ apartar un factor

ambos pares $\rightarrow$ ángulo mitad

$\tan^n$, $\cot^n \rightarrow$ apartar dos y usar $\sec^2 - 1$, $\csc^2 - 1$

$\sec$ par $\rightarrow u = \tan x$; $\tan$ impar $\rightarrow u = \sec x$

Sustitución trigonométrica

$$\sqrt{a^2 - u^2} \Rightarrow u = a \sin \theta$$

$$\sqrt{a^2 + u^2} \Rightarrow u = a \tan \theta$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} \Rightarrow u = a \sec \theta$$

regresar a la variable original con el triángulo

trinomio bajo la raíz $\rightarrow$ completar cuadrados primero

Fracciones parciales

1. Si es impropia, dividir primero

2. Factorizar $D(x)$ por completo

$$(px + q)^m \Rightarrow \frac{A_1}{px + q} + \dots + \frac{A_m}{(px + q)^m}$$

$$(ax^2 + bx + c)^n \Rightarrow \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c} + \dots$$

lineales $\rightarrow$ sustituir las raíces

cuadráticos $\rightarrow$ igualar coeficientes por potencias

Integrales que aparecen al final

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

(fórmula de reducción para la secante)



Solucionario paso a paso

Solucionario — Tarea 3.1 (integración por partes)

1) $\int x e^{3x} dx$

Paso 1. Por ILATE se elige u ; el resto del integrando es dv .

$$u = x, \quad dv = e^{3x} dx$$

Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx$$

Paso 4. Se resuelve la integral restante.

$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

2) $\int x \cos 2x dx$

Paso 1. Por ILATE se elige u ; el resto del integrando es dv .

$$u = x, \quad dv = \cos 2x dx$$

Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$$

Paso 4. Se resuelve la integral restante.

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

3) $\int x \sec x \tan x dx$

Paso 1. Por ILATE se elige u ; el resto del integrando es dv .

$$u = x, \quad dv = \sec x \tan x dx$$

Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = dx, \quad v = \sec x$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u dv = uv - \int v du$.

$$x \sec x - \int \sec x dx$$

Paso 4. Se resuelve la integral restante.

$$= x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$$

4) $\int x 3^x dx$

Paso 1. Por ILATE se elige u ; el resto del integrando es dv .

$$u = x, \quad dv = 3^x dx$$

Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = dx, \quad v = \frac{3^x}{\ln 3}$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\frac{x 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \int 3^x dx$$

Paso 4. Se resuelve la integral restante.

$$= \frac{x 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} + C$$



5) $\int \ln 5x \, dx$

Paso 1. Por ILATE se elige u ; el resto del integrando es dv .

$$u = \ln 5x, \quad dv = dx$$

Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

$$x \ln 5x - \int x \cdot \frac{dx}{x}$$

La derivada de $\ln 5x$ es $1/x$: la constante 5 desaparece por la regla del logaritmo.

Paso 4. Se resuelve la integral restante.

$$= x \ln 5x - x + C$$

6) $\int \sin^{-1} w \, dw$

Paso 1. Por ILATE se elige u ; el resto del integrando es dv .

$$u = \sin^{-1} w, \quad dv = dw$$

Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}, \quad v = w$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

$$w \sin^{-1} w - \int \frac{w \, dw}{\sqrt{1-w^2}}$$

La integral restante sale con $t = 1 - w^2$, $dt = -2w \, dw$.

Paso 4. Se resuelve la integral restante.

$$= w \sin^{-1} w + \sqrt{1-w^2} + C$$

7) $\int \frac{(\ln t)^2}{t} \, dt$

Paso 1. Aquí no hace falta integrar por partes: es una sustitución simple.

$$u = \ln t, \quad du = \frac{dt}{t}$$

Paso 2. La integral queda como una potencia.

$$\int u^2 \, du = \frac{u^3}{3}$$

Paso 3. Se regresa a t .

$$= \frac{1}{3}(\ln t)^3 + C$$

8) $\int x \sec^2 x \, dx$

Paso 1. Por ILATE se elige u ; el resto del integrando es dv .

$$u = x, \quad dv = \sec^2 x \, dx$$

Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = dx, \quad v = \tan x$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

$$x \tan x - \int \tan x \, dx$$

Como $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x|$, al restarla el signo se vuelve positivo.

Paso 4. Se resuelve la integral restante.

$$= x \tan x + \ln|\cos x| + C$$

9) $\int x \tan^{-1} x \, dx$

Paso 1. Por ILATE se elige u ; el resto del integrando es dv .

$$u = \tan^{-1} x, \quad dv = x \, dx$$



Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Se divide: $x^2/(1+x^2) = 1 - 1/(1+x^2)$, cuya integral es $x - \arctan x$.

Paso 4. Se resuelve la integral restante.

$$= \frac{x^2+1}{2} \tan^{-1} x - \frac{x}{2} + C$$

10) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

Paso 1. Por ILATE se elige u ; el resto del integrando es dv .

$$u = \ln(x^2 + 1), \quad dv = dx$$

Paso 2. Se deriva u y se integra dv .

$$du = \frac{2x dx}{x^2 + 1}, \quad v = x$$

Paso 3. Se sustituye en $\int u dv = uv - \int v du$.

$$x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

Otra vez $x^2/(x^2+1) = 1 - 1/(x^2+1)$.

Paso 4. Se resuelve la integral restante.

$$= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \tan^{-1} x + C$$

11) $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$

Paso 1. Se elige dv como la parte con el denominador al cuadrado.

$$u = x e^x, \quad dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$$

Paso 2. Se deriva u (regla del producto) y se integra dv .

$$du = (x+1)e^x dx, \quad v = -\frac{1}{x+1}$$

Paso 3. Se sustituye; el factor $(x+1)$ se cancela.

$$-\frac{x e^x}{x+1} + \int e^x dx$$

Paso 4. Se suman las fracciones.

$$= \frac{e^x}{x+1} + C$$

Comprobación: el integrando es exactamente la derivada de $e^x/(x+1)$.

12) $\int x^2 \sen 3x dx$

Paso 1. Por ILATE la algebraica es u . Como es un polinomio de grado 2, habría que aplicar la fórmula tres veces: conviene el método tabular.

$$u = x^2, \quad dv = \sen 3x dx$$

Paso 2. Se arma la tabla: a la izquierda se deriva hasta llegar a cero; a la derecha se integra $\sen 3x$ tres veces.

derivar u

integrar dv

x^2	$\oplus$	$\text{sen } 3x$
$2x$	$\ominus$	$-\frac{1}{3}\cos 3x$
2	$\oplus$	$-\frac{1}{9}\text{sen } 3x$
0		$\frac{1}{27}\cos 3x$

se multiplica en diagonal alternando signos

Paso 3. Se multiplican las diagonales alternando $+$ $-$ $+$. Cada producto usa el término de la izquierda con el de la fila siguiente a la derecha.

$$x^2\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - 2x\left(-\frac{1}{9}\text{sen } 3x\right) + 2\left(\frac{1}{27}\cos 3x\right)$$

Paso 4. Como la columna izquierda llegó a cero, no queda ninguna integral pendiente: solo se ordena.

$$= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x \text{sen } 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C$$

13) $\int \text{sen}(\ln y) dy$

Paso 1. Conviene una sustitución previa que quite el logaritmo de adentro del seno.

$$t = \ln y \Rightarrow y = e^t, \quad dy = e^t dt$$

Paso 2. La integral se convierte en el caso cíclico típico de exponencial por trigonométrica.

$$\int \text{sen}(\ln y) dy = \int e^t \text{sen } t dt$$

Paso 3. Se arma la tabla con $u = \text{sen } t$ y $dv = e^t dt$. Ninguna columna llega a cero: es cíclica.

derivar u

integrar dv

$\text{sen } t$	$\oplus$	e^t
$\cos t$	$\ominus$	e^t
$-\text{sen } t$		e^t
	$+$	$\int$

la última fila se integra: reaparece la integral original

Paso 4. Las dos primeras diagonales van con $+$ y $-$; la última fila se integra en vez de multiplicarse.

$$I = e^t \text{sen } t - e^t \cos t - \int e^t \text{sen } t dt$$

Paso 5. Esa integral es la misma I : se despeja algebraicamente.

$$2I = e^t(\text{sen } t - \cos t) \Rightarrow I = \frac{e^t}{2}(\text{sen } t - \cos t)$$

Paso 6. Se regresa a y usando $e^t = y$ y $t = \ln y$.

$$= \frac{y}{2} [\text{sen}(\ln y) - \cos(\ln y)] + C$$



14) $\int \sin t \cdot \ln(\cos t) dt$

Paso 1. Primero una sustitución, no partes: el factor $\sin t$ es el diferencial de $\cos t$.

$$w = \cos t, \quad dw = -\sin t dt$$

Paso 2. La integral se transforma en una de logaritmo.

$$-\int \ln w dw$$

Paso 3. Esa sí se hace por partes: $\int \ln w dw = w \ln w - w$.

$$-(w \ln w - w)$$

Paso 4. Se regresa a t .

$$= -\cos t \cdot \ln(\cos t) + \cos t + C$$

Solucionario — Tarea 3.2 (potencias trigonométricas)

1) $\int \cos^5 x dx$

Caso 1: exponente impar. Se aparta $\cos x$ y se usa $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$\int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx$$

Con $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ se desarrolla el cuadrado y se integra.

$$= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

2) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

Caso 2: el seno tiene exponente impar. Se aparta $\sin x$ y se convierte el resto.

$$\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x (\sin x dx)$$

Con $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$ aparece un signo negativo.

$$-\int (u^2 - u^4) du$$

$$= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

3) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$

Caso 2: el coseno tiene exponente impar. Se aparta $\cos x$.

$$\int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) (\cos x dx)$$

Con $u = \sin x$, $du = \cos x dx$.

$$\int (u^4 - u^6) du$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$$

4) $\int \sin^4 x dx$

Caso 3: exponente par. Se aplica el ángulo mitad dos veces.

$$\sin^4 x = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

Se reúne todo y queda un integrando de primer grado en cosenos.

$$\frac{1}{8} \int (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) dx$$

$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

5) $\int \tan^6 3x dx$

Caso 4: se aparta $\tan^2 3x = \sec^2 3x - 1$ y se repite el proceso.

$$\int \tan^6 u du = \frac{\tan^5 u}{5} - \frac{\tan^3 u}{3} + \tan u - u$$

Con $u = 3x$ el resultado se divide entre 3.



$$= \frac{1}{15} \tan^5 3x - \frac{1}{9} \tan^3 3x + \frac{1}{3} \tan 3x - x + C$$

6) $\int \sec^4 x \, dx$

Caso 5: la potencia de la secante es par. Se aparta $\sec^2 x$ y se usa $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

$$\int (1 + \tan^2 x)(\sec^2 x \, dx)$$

Con $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$.

$$= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

7) $\int \cot^5 2x \, dx$

Caso 4 con cotangente: se aparta $\cot^2 2x = \csc^2 2x - 1$ y se repite.

$$\int \cot^5 u \, du = -\frac{\cot^4 u}{4} + \frac{\cot^2 u}{2} + \ln|\sen u|$$

Con $u = 2x$ el resultado se divide entre 2.

$$= -\frac{1}{8} \cot^4 2x + \frac{1}{4} \cot^2 2x + \frac{1}{2} \ln|\sen 2x| + C$$

8) $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$

Caso 5: la secante tiene potencia par. Se aparta $\sec^2 x$.

$$u = \tan x, \quad du = \sec^2 x \, dx, \quad \sec^2 x = 1 + u^2$$
$$\int u^6(1 + u^2) \, du$$

$$= \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$

9) $\int \tan^5 2x \sec^4 2x \, dx$

Caso 5: la secante tiene potencia par. Se aparta $\sec^2 2x$.

$$u = \tan 2x, \quad du = 2 \sec^2 2x \, dx$$
$$\frac{1}{2} \int u^5(1 + u^2) \, du$$

$$= \frac{1}{12} \tan^6 2x + \frac{1}{16} \tan^8 2x + C$$

10) $\int \sec^5 x \tan^4 x \, dx$

Aquí la secante es impar y la tangente par: no aplica ninguno de los dos atajos.

Se convierte todo a secante con $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y se usa la fórmula de reducción.

$$\int \sec^9 x \, dx - 2 \int \sec^7 x \, dx + \int \sec^5 x \, dx$$

Aplicando la reducción tres veces y agrupando:

$$= \frac{1}{8} \sec^7 x \tan x - \frac{3}{16} \sec^5 x \tan x + \frac{1}{64} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{128} \sec x \tan x + \frac{3}{128} \ln|\sec x + \tan x| + C$$

11) $\int \cot^3 x \csc^3 x \, dx$

Caso 5 con cotangente: la cotangente es impar, se aparta $\csc x \cot x$.

$$\int (\csc^2 x - 1) \csc^2 x (\csc x \cot x \, dx)$$

Con $u = \csc x$, $du = -\csc x \cot x \, dx$.

$$- \int (u^4 - u^2) \, du$$

$$= -\frac{1}{5} \csc^5 x + \frac{1}{3} \csc^3 x + C$$

12) $\int \cot^3 x \, dx$

Caso 4: se aparta $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

$$\int \cot x (\csc^2 x - 1) \, dx$$

El primer término sale con $u = \cot x$; el segundo es $\int \cot x \, dx = \ln|\sen x|$.

$$= -\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln|\sen x| + C$$



13) $\int \sec^6 4x \tan 4x \, dx$

La tangente aparece a la primera potencia: se aparta $\sec 4x \tan 4x$.

$$u = \sec 4x, \quad du = 4 \sec 4x \tan 4x \, dx$$

$$\frac{1}{4} \int u^5 \, du$$

$$= \frac{1}{24} \sec^6 4x + C$$

14) $\int \cot^2 3x \csc^4 3x \, dx$

Caso 5: la cosecante tiene potencia par. Se aparta $\csc^2 3x$.

$$u = \cot 3x, \quad du = -3 \csc^2 3x \, dx, \quad \csc^2 3x = 1 + u^2$$

$$-\frac{1}{3} \int u^2 (1 + u^2) \, du$$

$$= -\frac{1}{9} \cot^3 3x - \frac{1}{15} \cot^5 3x + C$$

15) $\int \cos 4x \cos 3x \, dx$

Caso 6: ángulos distintos. Se usa $\cos A \cos B$ con $A = 4x$, $B = 3x$.

$$\frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 7x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{14} \sin 7x + C$$

16) $\int \sin 3y \cos 5y \, dy$

Caso 6: se usa $\sin A \cos B$ con $A = 3y$, $B = 5y$.

$$\frac{1}{2} \int [\sin(-2y) + \sin 8y] \, dy$$

$\sin(-2y) = -\sin 2y$, cuya integral es $+(1/2)\cos 2y$.

$$= \frac{1}{4} \cos 2y - \frac{1}{16} \cos 8y + C$$

17) $\int \sin 5\theta \sin \theta \, d\theta$

Caso 6: se usa $\sin A \sin B$ con $A = 5\theta$, $B = \theta$.

$$\frac{1}{2} \int (\cos 4\theta - \cos 6\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \sin 4\theta - \frac{1}{12} \sin 6\theta + C$$

18) $\int e^x \tan^4(e^x) \, dx$

Sustitución previa: $u = e^x$, $du = e^x \, dx$.

$$\int \tan^4 u \, du = \frac{\tan^3 u}{3} - \tan u + u$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3(e^x) - \tan(e^x) + e^x + C$$

19) $\int \frac{\sec^4(\ln x)}{x} \, dx$

Sustitución previa: $u = \ln x$, $du = dx/x$.

$$\int \sec^4 u \, du = \tan u + \frac{\tan^3 u}{3}$$

$$= \tan(\ln x) + \frac{1}{3} \tan^3(\ln x) + C$$

20) $\int (\tan 2x + \cot 2x)^2 \, dx$

Se desarrolla el cuadrado; los términos cruzados valen 2 y se cancelan con los -1 de las identidades.

$$\tan^2 2x + 2 + \cot^2 2x = \sec^2 2x + \csc^2 2x$$



$$= \frac{1}{2} \tan 2x - \frac{1}{2} \cot 2x + C$$

21) $\int \frac{2 \operatorname{sen} w - 1}{\cos^2 w} dw$

Se separa la fracción en dos términos reconocibles.

$$\frac{2 \operatorname{sen} w - 1}{\cos^2 w} = 2 \tan w \sec w - \sec^2 w$$

$$= 2 \sec w - \tan w + C$$

22) $\int \frac{\tan^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Sustitución previa: $u = \sqrt{x}$, $du = dx/(2\sqrt{x})$, de modo que $dx/\sqrt{x} = 2 du$.

$$2 \int \tan^3 u du = 2 \left(\frac{\tan^2 u}{2} + \ln |\cos u| \right)$$

$$= \tan^2 \sqrt{x} + 2 \ln |\cos \sqrt{x}| + C$$

23) $\int \frac{\tan^4 y}{\sec^5 y} dy$

Se pasa todo a senos y cosenos: la secante del denominador sube al numerador.

$$\frac{\tan^4 y}{\sec^5 y} = \frac{\operatorname{sen}^4 y}{\cos^4 y} \cdot \cos^5 y = \operatorname{sen}^4 y \cos y$$

Queda una sustitución inmediata con $u = \operatorname{sen} y$.

$$= \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 y + C$$

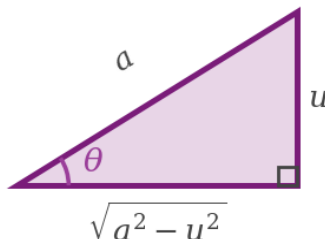
Solucionario — Tarea 3.3 (sustitución trigonométrica)

1) $\int \frac{4}{x^2 \sqrt{16 - x^2}} dx$

Paso 1. Forma $\sqrt{a^2 - u^2}$ con $a = 4$, $u = x$.

$$x = 4 \operatorname{sen} \theta, \quad dx = 4 \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{16 - x^2} = 4 \cos \theta$$

$$u = a \operatorname{sen} \theta$$



Paso 2. Se reemplaza y se simplifica.

$$\frac{1}{4} \int \csc^2 \theta d\theta$$

Paso 3. Se integra y se lee $\cot \theta$ del triángulo.

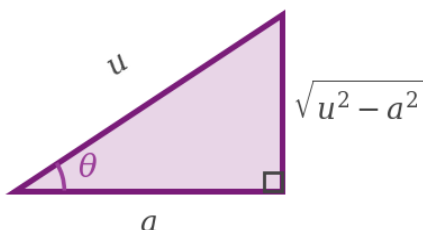
$$= -\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4x} + C$$

2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$

Paso 1. Forma $\sqrt{u^2 - a^2}$ con $a = 5$. También puede resolverse con $w = x^2 - 25$.

$$x = 5 \sec \theta, \quad dx = 5 \sec \theta \tan \theta d\theta, \quad \sqrt{x^2 - 25} = 5 \tan \theta$$

$$u = a \sec \theta$$



Paso 2. Al sustituir, $\tan \theta$ se cancela.

$$125 \int \sec^4 \theta d\theta = 125 \left(\tan \theta + \frac{\tan^3 \theta}{3} \right)$$

Paso 3. Del triángulo, $\tan \theta = \sqrt{(x^2 - 25)}/5$.

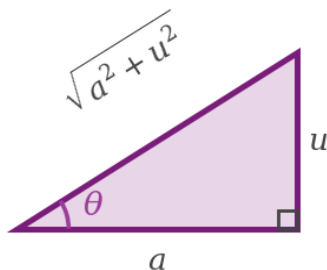
$$= 25 \sqrt{x^2 - 25} + \frac{1}{3}(x^2 - 25)^{3/2} + C$$

3) $\int \frac{9x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Paso 1. Forma $\sqrt{(a^2 + u^2)}$ con $a = 1$. Aquí es más corto sustituir $w = 1 + x^2$.

$$w = 1 + x^2, \quad x^2 = w - 1, \quad x dx = \frac{dw}{2}$$

$$u = a \tan \theta$$



Paso 2. Se escribe $x^3 = x^2 \cdot x$ y se reemplaza.

$$\frac{9}{2} \int (w^{1/2} - w^{-1/2}) dw$$

Paso 3. Se antideriva y se regresa a x .

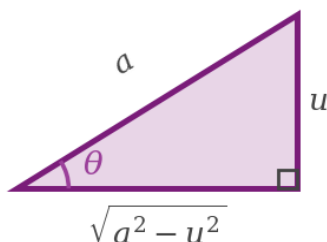
$$= 3(1 + x^2)^{3/2} - 9\sqrt{1 + x^2} + C$$

4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$

Paso 1. Forma $\sqrt{(a^2 - u^2)}$ con $a = 4$.

$$x = 4 \sin \theta, \quad dx = 4 \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{16 - x^2} = 4 \cos \theta$$

$$u = a \operatorname{sen} \theta$$



Paso 2. El coseno se cancela y queda una potencia par de seno.

$$16 \int \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta = 8\theta - 4 \operatorname{sen} 2\theta$$

Paso 3. Se usa $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ y se leen los valores del triángulo.

$$= 8 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{4} - \frac{1}{2} x \sqrt{16 - x^2} + C$$

5) $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x \, dx$

Paso 1. Primero se integra por partes (ILATE: la inversa es u).

$$u = \operatorname{sen}^{-1} x, \quad dv = x^2 \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^3}{3}$$

Paso 2. Se aplica la fórmula.

$$\frac{x^3}{3} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

Paso 3. La integral restante sale con $w = 1 - x^2$, $x^2 = 1 - w$.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = -\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2}$$

Paso 4. Se sustituye y se ordena.

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{3} \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{9}(1 - x^2)^{3/2} + C$$

Solucionario — Tarea 3.4 – 3.5 (fracciones parciales)

1) $\int \frac{1}{x^2 - 9} \, dx$

Paso 1. Se factoriza el denominador.

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Paso 2. Descomposición y ecuación básica.

$$1 = A(x - 3) + B(x + 3)$$

Paso 3. Se sustituyen las raíces $x = -3$ y $x = 3$.

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{6}$$

Paso 4. Se integran las dos fracciones y se reúnen los logaritmos.

$$= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

2) $\int \frac{1}{4x^2 - 1} \, dx$

Paso 1. Se factoriza como diferencia de cuadrados.

$$4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$$

Paso 2. Ecuación básica.

$$1 = A(2x + 1) + B(2x - 1)$$

Paso 3. Con $x = 1/2$ y $x = -1/2$.

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

Paso 4. Al integrar aparece un $1/2$ extra por la regla de la cadena.

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + C$$

3) $\int \frac{4x^2}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$

Paso 1. Se factoriza el denominador; tiene un factor lineal repetido.

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2$$

Paso 2. Descomposición con tres constantes y ecuación básica.

$$4x^2 = A(x + 1)^2 + B(x - 1)(x + 1) + C(x - 1)$$

Paso 3. Con $x = 1$ sale A ; con $x = -1$ sale C ; con $x = 0$ se despeja B .

$$A = 1, \quad B = 3, \quad C = -2$$

Paso 4. Se integra cada fracción.

$$= \ln|x - 1| + 3 \ln|x + 1| + \frac{2}{x+1} + C$$

Nota: en el documento original el denominador aparece como $x^3 + x^2 - x + 1$, que no se factoriza; aquí se corrigió a $x^3 + x^2 - x - 1$.

4) $\int \frac{6x}{x^3 - 8} dx$

Paso 1. Se factoriza como diferencia de cubos: queda un factor cuadrático irreducible.

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Paso 2. Descomposición mixta: constante sobre el lineal, binomio sobre el cuadrático.

$$6x = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)$$

Paso 3. Con $x = 2$ sale A ; luego se igualan coeficientes.

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2$$

Paso 4. En el término cuadrático se completan cuadrados: $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$.

$$\int \frac{-(x + 1) + 3}{(x + 1)^2 + 3} dx$$

Paso 5. La primera parte da logaritmo y la segunda arcotangente.

$$= \ln|x - 2| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 4) + \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

5) $\int \frac{x}{16x^4 - 1} dx$

Paso 1. Conviene una sustitución previa que reduzca el grado.

$$w = x^2, \quad dw = 2x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \int \frac{dw}{16w^2 - 1}$$

Paso 2. Se factoriza y se plantea la descomposición.

$$16w^2 - 1 = (4w - 1)(4w + 1) \quad \Rightarrow \quad 1 = A(4w + 1) + B(4w - 1)$$

Paso 3. Con $w = 1/4$ y $w = -1/4$.

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

Paso 4. Se integra y se regresa a x .

$$= \frac{1}{16} \ln \left| \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} \right| + C$$

6) $\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} dx$

Paso 1. Factor cuadrático irreducible repetido: dos numeradores lineales.

$$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2}$$

Paso 2. Se multiplica por $(x^2 + 9)^2$ y se desarrolla.



$$x^2 - x + 9 = (Ax + B)(x^2 + 9) + Cx + D$$

Paso 3. Se igualan coeficientes por potencias de x .

$$A = 0, \quad B = 1, \quad 9A + C = -1, \quad 9B + D = 9$$

Paso 4. Se resuelve el sistema.

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = 0$$

Paso 5. La primera integral da arcotangente; la segunda sale con $w = x^2 + 9$.

$$= \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3} + \frac{1}{2(x^2 + 9)} + C$$
